PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 4. 15. Februar 1914. 15. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 5 am 14. Februar 1914.

INHALT:

Originalmitteilungen:

G. Mie, Bemerkungen zu der Einsteinschen Gravitationstheorie. II. S. 169.

A. Einstein, Prinzipielles zur verallgemeinerten Relativitätstheorie und Gravitationstheorie. S. 176.

H. Thirring, Raumgitterschwingungen und spezifische Wärmen mehratomiger fester Körper. II. S. 180.

M. Born, Über die Methode der Eigenschwingungen in der Theorie der spezifischen Wärmen. S. 185.

L. Föppl, Der Fundamentalbereich des Diamantgitters. S. 191.

K. F. Herzfeld, Der Zeemaneffekt in den Quantentheorien der Serienspektren. S. 193.

E. Gehrcke, Ein Modell zur Erklärung der Lichtemission. II. S. 198.

K. E. F. Schmidt, Das Problem der Reichweite elektrischer Wellen. S. 202.

B. Szilard, Über ein direkt ablesbares und direkt anzeigendes Elektrometer zur Messung sehr schwacher Ströme. S. 209.

S. Mikola, Elektrisch erregte Bewegungserscheinungen in Flüssigkeitslamellen. S. 211.

G. C. Simpson, Über die Elektrizität der Niederschläge. S. 213.

J. Stark, Bemerkung zu einer Mitteilung des Herrn A. Lo Surdo. S. 215.

Besprechungen:
Technik des Kriegswesens. S. 216.

Personalien. S. 216.

Angebote. S. 216.

Gesuche. S. 216.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Bemerkungen zu der Einsteinschen Gravitationstheorie. II [1]).

Von Gustav Mie.

7. Satz von der Relativität des Gravitationspotentials. Die Annahmen der Einsteinschen Theorie sind zum Teil vielleicht ziemlich nebensächlicher Natur, sie sind aber alle nach einem Prinzip gemacht, nämlich daß die sich ergebenden Gleichungen außer den Lorentzschen Transformationen auch noch andere lineare Transformationen zulassen. Ich glaube, man darf die beiden Sätze:

1. daß das Gravitationspotential ein vierdimensionaler Tensor ist,

2. daß die allgemeinen Gleichungen der Ätherdynamik noch andere lineare Transformationen zulassen, als die Lorentzschen,

als die beiden wesentlichen oder Hauptannahmen der Einsteinschen Theorie bezeichnen, gegen welche die anderen Annahmen als Nebenannahmen eine untergeordnete Rolle spielen.

Um den zweiten der Sätze, in welchem Einstein eine Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips erblickt, in seinem eigentlichen Wesen zu erfassen, wird es notwendig sein, ziemlich genau auf ihn einzugehen, obgleich es dabei nicht zu vermeiden ist, daß wir einige Rechnungen der Herren A. Einstein und M. Großmann wiederholen.

Wir wollen uns denken, daß sich im leeren Raum, weit entfernt von aller übrigen Materie, also an einer Stelle, wo das Gravitationspotential den skalaren Wert -1 hat, ein materielles System befindet, in welchem uns die Vorgänge und ihre Gesetzmäßigkeiten vollständig bekannt sind. Wir denken uns weiter dieses selbe materielle System in die Nähe eines sehr großen Körpers, z. B. der Erde, gebracht, wo das Gravitationspotential nicht mehr gleich -1 ist, sondern durch einen Tensor dargestellt wird. Da das Gravitationspotential in der Funktion H und somit auch in den Gleichungen der Ätherdynamik vorkommt, so ist anzunehmen, daß schon das Vorhandensein eines von -1 verschiedenen Gravitationspotentials alle Vorgänge in dem materiellen System beeinflußt. Es fragt sich nun, welcher Art dieser Einfluß des Gravitationspotentials ist. Diese Frage habe auch ich schon in meiner Theorie des skalaren Gravitationspotentials gestellt und für diese Theorie beantwortet (l. c., III., S. 61 ff.).

Die Feldstärke der Gravitation soll auch an dem zu zweit genannten Orte so klein sein, daß auf der Begrenzung eines Bereiches, der das materielle System enthält und im Vergleich zu ihm nach allen Richtungen unendlich ausgedehnt ist, die Änderungen des Gravitationspotentials noch keine bemerkbaren Beträge erreichen, daß also das Gravitationspotential auf der Begrenzung als konstant angesehen werden kann. Es sei nun dieser konstante Wert des Gravitationspotentials in unendlicher Entfernung von dem betrachteten materiellen System mit $(g^1_{\mu\nu})$ bezeichnet. Wir wollen dann 16 Transformationskoeffizienten $a_{\mu\nu}$, die zusammen eine vierdimensionale, im allgemeinen unsymmetrische

1) I: Diese Zeitschr. 15, 115, 1914.

Matrix bilden ($a_{\mu\nu} \neq a_{\nu\mu}$), durch die folgenden Gleichungen definieren:

$$\left.\begin{aligned} a_{\mu 1}\cdot a_{\nu 1} + a_{\mu 2}\cdot a_{\nu 2} + a_{\mu 3}\cdot a_{\nu 3} + \\ + a_{\mu 4}\cdot a_{\nu 4} = -\,g^1_{\mu\nu}; \end{aligned}\right| \quad (42)$$

Da dies nur 10 Gleichungen sind, so kann man natürlich 6 von den Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ beliebig wählen. Die zu der Matrix $(a_{\mu\nu})$ reziproke Matrix will ich mit $(\alpha_{\mu\nu})$ bezeichnen, die Größen $\alpha_{\mu\nu}$ sind also folgendermaßen definiert:

$$\left.\begin{aligned} a_{1\mu}\cdot\alpha_{1\mu} + a_{2\mu}\cdot\alpha_{2\mu} + a_{3\mu}\cdot\alpha_{3\mu} + \\ + a_{4\mu}\cdot\alpha_{4}{}^{\mu} = 1, \\ a_{1\mu}\cdot\alpha_{1\nu} + a_{2\mu}\cdot\alpha_{2\nu} + a_{3\mu}\cdot\alpha_{3\nu} + \\ + a_{4\mu}\cdot\alpha_{4\nu} = 0, \\ \mu \neq \nu. \end{aligned}\right| \quad (43)$$

Ich führe nun an Stelle der Komponenten des Gravitationspotentials $g_{\mu\nu}$ im Innern und in der näheren Umgebung des betrachteten materiellen Systems die folgenden linearen Funktionen der $g_{\mu\nu}$ ein, die ich $g_{\mu\nu}'$ nennen will:

$$g_{\mu\nu}' = \sum_{\varkappa,\lambda} \alpha_{\varkappa\mu}\cdot\alpha_{\lambda\nu}\cdot g_{\varkappa\lambda}. \quad (44)$$

Die zehn Größen $g_{\mu\nu}'$ bilden zusammen wieder einen vierdimensionalen Tensor, der aus dem Tensor $(g_{\mu\nu})$ gewissermaßen durch Deformation und Drehung entstanden ist; im Unendlichen, wo $(g_{\mu\nu})$ in $(g^1_{\mu\nu})$ übergeht, wird $(g_{\mu\nu}')$ zufolge der Formeln (42) und (43) zu dem Skalar -1. Ich berechne weiter den zu $(g_{\mu\nu}')$ reziproken Tensor $(\gamma_{\mu\nu}')$, der definiert ist durch:

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu 1}'\cdot\gamma_{\mu 1}' + g_{\mu 2}'\cdot\gamma_{\mu 2}' + g_{\mu 3}'\cdot\gamma_{\mu 3}' + \\ + g_{\mu 4}'\cdot\gamma_{\mu 4}' = 1, \\ g_{\mu 1}'\cdot\gamma_{\nu 1}' + g_{\mu 2}'\cdot\gamma_{\nu 2}' + g_{\mu 3}'\cdot\gamma_{\nu 3}' + \\ + g_{\mu 4}'\cdot\gamma_{\nu 4}' = 0, \\ \mu \neq \nu. \end{aligned}\right|$$

Es läßt sich leicht einsehen, daß sich die $\gamma_{\mu\nu}'$ als lineare Funktionen der Komponenten $\gamma_{\mu\nu}$ des zu $g_{\mu\nu}$ reziproken Tensors darstellen lassen:

$$\gamma_{\mu\nu}' = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\mu}\cdot a_{\lambda\nu}\cdot\gamma_{\varkappa\lambda}. \quad (45)$$

Durch Anwendung der Formeln (43) kann man leicht die Definitionsgleichungen der $\gamma_{\mu\nu}'$ verifizieren. Will man umgekehrt die $g_{\mu\nu}$ aus den $g_{\mu\nu}'$ und die $\gamma_{\mu\nu}$ aus den $\gamma_{\mu\nu}'$ berechnen, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\mu\varkappa}\cdot a_{\nu\lambda}\cdot g_{\varkappa\lambda}', \\ \gamma_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa,\lambda} \alpha_{\mu\varkappa}\cdot\alpha_{\nu\lambda}\cdot\gamma_{\varkappa\lambda}'. \end{aligned}\right| \quad (46)$$

Ferner führen wir an Stelle des rechtwinkligen Koordinatensystems (x_1, x_2, x_3, x_4) ein schiefwinkliges ein (x_1', x_2', x_3', x_4'), das noch dazu auf den verschiedenen Koordinatenachsen verschiedene Längeneinheiten hat, indem wir die folgenden Substitutionen machen:

$$x_\nu = a_{\nu 1}\cdot x_1' + a_{\nu 2}\cdot x_2' + a_{\nu 3}\cdot x_3' + a_{\nu 4}\cdot x_4'. \quad (47)$$

Es ist dann:

$$x_\nu' = a_{1\nu}\cdot x_1 + a_{2\nu}\cdot x_2 + a_{3\nu}\cdot x_3 + a_{4\nu}\cdot x_4. \quad (48)$$

Wir bezeichnen ferner die aus den $g_{\mu\nu}$ gebildete Determinante, wie oben in Gleichung (21), mit g, ebenso die aus den $g^1_{\mu\nu}$ und die aus den $g_{\mu\nu}'$ gebildeten Determinanten mit g_1 und g'. Dann folgt aus (42) und (46) ohne weiteres:

$$g = g_1\cdot g'. \quad (49)$$

Wir definieren weiter:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\mu\nu\alpha}' = -\frac{1}{2\varkappa}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}'}{\partial x_\alpha'}, \\ \mathfrak{k}_{\mu\nu\alpha}' = \sqrt{g'}\cdot\sum_\beta \gamma_{\alpha\beta}'\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}'}{\partial x_\beta'}, \end{aligned}\right| \quad (50)$$

und in Analogie zu (30):

$$H_g' = \frac{1}{2}\cdot\sum_{\mu,\nu,\alpha}\mathfrak{g}_{\mu\nu\alpha}'\cdot\mathfrak{k}_{\mu\nu\alpha}'. \quad (51)$$

Es läßt sich dann durch eine leichte Rechnung zeigen, daß:

$$H_g' = \frac{1}{\sqrt{g_1}}\cdot H_g. \quad (52)$$

Fassen wir H_g' als eine Funktion der transformierten Größen $g_{\mu\nu}'$ und $\mathfrak{g}_{\mu\nu\alpha}'$ auf, so folgt aus (51):

$$\mathfrak{k}_{\mu\nu\alpha}' = \frac{\partial H_g'}{\partial\mathfrak{g}_{\mu\nu\alpha}'}. \quad (53)$$

Weiter führen wir einen neuen Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{V}'$ ein, den man aus $\mathfrak{V}$ durch die folgenden Transformationsgleichungen bekommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{V}_\mu}{s} = \alpha_{\mu 1}\cdot\mathfrak{V}_1' + \alpha_{\mu 2}\cdot\mathfrak{V}_2' + \alpha_{\mu 3}\cdot\mathfrak{V}_3' + \\ + \alpha_{\mu 4}\cdot\mathfrak{V}_4', \end{aligned}\right| \quad (54)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} s\cdot\mathfrak{V}_\mu' = a_{1\mu}\cdot\mathfrak{V}_1 + a_{2\mu}\cdot\mathfrak{V}_2 + a_{3\mu}\cdot\mathfrak{V}_3 + \\ + a_{4\mu}\cdot\mathfrak{V}_4, \end{aligned}\right| \quad (55)$$

wo s folgende Größe bedeuten soll:

$$s^2 = \sum_{\mu,\nu} g^1_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{V}_\mu\cdot\mathfrak{V}_\nu = \frac{1}{\sum_{\mu,\nu}\gamma^1_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{V}_\mu'\cdot\mathfrak{V}_\nu'}. \quad (56)$$

Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen (55) findet man, wenn man (42) beachtet:

$$\mathfrak{V}_1'^2 + \mathfrak{V}_2'^2 + \mathfrak{V}_3'^2 + \mathfrak{V}_4'^2 = -1.$$

Es ist leicht einzusehen, daß

$$\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{V}_\mu\cdot\mathfrak{V}_\nu = s^2\cdot\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}'\cdot\mathfrak{V}_\mu'\cdot\mathfrak{V}_\nu',$$

also nach (16):

$$H_\epsilon = \varrho\cdot s\cdot\sqrt{\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}'\cdot\mathfrak{V}_\mu'\cdot\mathfrak{V}_\nu'}.$$

Wir wollen nun weiter definieren:

$$\varrho' = \frac{\varrho\cdot s}{\sqrt{g_1}} = \frac{\varrho}{\sqrt{g_1}}\cdot\sqrt{\sum_{\mu,\nu} g^1_{\mu\nu}\cdot\mathfrak{V}_\mu\cdot\mathfrak{V}_\nu}, \quad (58)$$

$$H_e' = \varrho' \cdot \sqrt{\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}' \cdot \mathfrak{B}_\mu' \cdot \mathfrak{B}_\nu'}, \tag{59}$$

dann ist:
$$H_e' = \frac{1}{\sqrt{g_1}} \cdot H_e, \tag{60}$$

und nach (52):
$$H' = H_e' + H_g' = \frac{1}{\sqrt{g_1}} \cdot H. \tag{61}$$

Wir definieren nun in Analogie zu (37):
$$\mathfrak{W}_\nu' = \frac{\partial H_e'}{\partial \mathfrak{B}_\nu'} = \frac{\varrho' \cdot \sum_\mu g_{\mu\nu}' \cdot \mathfrak{B}_\mu'}{\sqrt{\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}' \cdot \mathfrak{B}_\mu' \cdot \mathfrak{B}_\nu'}}, \tag{62}$$

dann zeigt eine leichte Rechnung, daß:
$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{W}_\nu' = \frac{s}{\sqrt{g_1}} \cdot (&a_{1\nu} \cdot \mathfrak{W}_1 + a_{2\nu} \cdot \mathfrak{W}_2 + \\ &+ a_{3\nu} \cdot \mathfrak{W}_3 + a_{4\nu} \cdot \mathfrak{W}_4). \end{aligned}\right| \tag{63}$$

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun schnell zum Schluß. Aus der Definition (53) der $\mathfrak{k}_{\mu\nu\alpha}$ folgt:
$$\sum_\alpha \frac{\partial \mathfrak{k}_{\mu\nu\alpha}}{\partial x_\alpha'} = \frac{1}{\sqrt{g_1}} \cdot \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\mu} \cdot a_{\lambda\nu} \cdot \sum_\alpha \frac{\partial \mathfrak{k}_{\varkappa\lambda\alpha}}{\partial x_\alpha}.$$

Setzen wir hier nach (2), (6), (14) ein:
$$\sum_\alpha \frac{\partial \mathfrak{k}_{\varkappa\lambda\alpha}}{\partial x_\alpha} = -\varkappa \cdot h_{\varkappa\lambda} = -2\varkappa \cdot \frac{\partial H}{\partial g_{\varkappa\lambda}},$$

so ergibt sich nach (46) und (61):
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{k}_{\mu\nu x}}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{k}_{\mu\nu y}}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{k}_{\mu\nu z}}{\partial z'} + \frac{\partial w_{\mu\nu}}{\partial t'} &= -\varkappa \cdot h_{\mu\nu}', \\ h_{\mu\nu}' = 2 \cdot \frac{\partial H'}{\partial g_{\mu\nu}'}&. \end{aligned}\right| \tag{64}$$

Aus der Definition der $\mathfrak{W}_\nu'$ und $\mathfrak{B}_\nu'$, (55) und (63), folgt:
$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu'} (\mathfrak{W}_\mu' \cdot \mathfrak{B}_\nu') = \frac{1}{\sqrt{g_1}} \cdot \sum_\lambda a_{\lambda\mu} \cdot \cdot \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\mathfrak{W}_\lambda \cdot \mathfrak{B}_\nu).$$

Nach (38) ergibt eine kleine Rechnung aus dieser Gleichung:
$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x'} (\mathfrak{W}_\mu' \cdot \mathfrak{B}_1') + \frac{\partial}{\partial y'} (\mathfrak{W}_\mu' \cdot \mathfrak{B}_2') + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z'} (\mathfrak{W}_\mu' \cdot \mathfrak{B}_3') - i \cdot \frac{\partial}{\partial t'} (\mathfrak{W}_\mu' \cdot \mathfrak{B}_4') = \\ &= \sum_{m,n} \frac{\partial H_e'}{\partial g_{mn}'} \cdot \frac{\partial g_{mn}'}{\partial x_\mu'}. \end{aligned}\right| \tag{65}$$

Wir haben nunmehr sämtliche Gleichungen der Einsteinschen Gravitationstheorie in den transformierten Größen bekommen, und zwar hat sich gezeigt, daß sie in diesen genau dieselbe Form haben, wie die ursprünglichen Gleichungen in den nicht transformierten Größen. Bedenken wir, daß das transformierte Gravitationspotential ($g_{\mu\nu}'$) im Unendlichen den skalaren Wert -1 annimmt, während das nichttransformierte ($g_{\mu\nu}$) im Unendlichen ($g_{\mu\nu}^1$) wird, so sehen wir, daß die bewiesene Transformationseigenschaft dasselbe besagt wie folgender Satz:

Der Satz von der Relativität des Gravitationspotentials. Wenn sich zwei leere Räume lediglich dadurch unterscheiden, daß in dem einen das Gravitationspotential den skalaren Wert -1 hat, in dem anderen dagegen einen beliebigen Tensorwert $g_{\mu\nu}^1$, so verlaufen in den beiden Räumen alle physikalischen Vorgänge in genau der gleichen Weise, vorausgesetzt, daß man Ort und Zeit im ersten Raum mit Hilfe eines gewöhnlichen orthogonalen Koordinatensystems (x, y, z, it) angibt, in dem zweiten dagegen mit Hilfe eines gewissen schiefwinkligen Koordinatensystems (x', y', z', it'), das durch die Gleichungen (42) und (48) definiert ist.

Man sieht hieraus deutlich, daß der „verallgemeinerte Relativitätssatz" in der Einsteinschen Theorie genau dieselbe Rolle spielt, wie in der meinigen der von mir so genannte „Satz von der Relativität des Gravitationspotentials" (l. c., III., S. 61). Nur sind die Transformationen in der Einsteinschen Theorie sehr viel komplizierter als die äußerst einfache Transformation, die in meiner Theorie gilt, und die durch die Formeln auf S. 63 meiner Abhandlung III dargestellt wird. Es ist das selbstverständlich, weil das Rechnen mit Tensoren überhaupt komplizierter ist als mit Skalaren. In einer Hinsicht jedoch ist der Unterschied des Einsteinschen Relativitätstheorems gegen das meinige wirklich bedeutend. Während in meiner Theorie nur die Größen, die den Zustand des Äthers angeben, transformiert werden, die Koordinaten dagegen ungeändert bleiben, so werden in der Einsteinschen Theorie die Koordinaten mittransformiert. Deswegen sind in der Einsteinschen Theorie die Transformationen der beiden Relativitätstheoreme, des von der Bewegung und des vom Gravitationspotential, einander sehr ähnlich, und das ist wahrscheinlich der Grund, warum Einstein sein Theorem anfänglich für eine Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips der Bewegung halten konnte[1]). Vom Stand-

1) In der Einleitung der Abhandlung: „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie usw." stellt Herr Einstein die Hypothese auf, „daß ein homogenes Schwerefeld sich durch einen Beschleunigungszustand des Bezugssystems physikalisch vollkommen ersetzen lasse". Er meint also offenbar irrtümlich, daß diese Hypothese (die Aquivalenzhypothese) der von ihm entwickelten Theorie zugrunde liege. Das wäre freilich eine allgemeinere Relativität der Bewegungen. In seinem Wiener Vortrag fordert Herr Einstein von der Gravitationstheorie nur noch, daß die „beobachtbaren Naturgesetze nicht vom Ab-

punkt des Physikers aus ist der Hauptunterschied der beiden Theorien, daß nach meinem Relativitätssatz die Naturgesetze durch das Gravitationspotential überhaupt nicht beeinflußt werden, nach dem Einsteinschen Relativitätssatz dagegen in der Weise, als ob die Längeneinheiten und die Zeiteinheit durch die Anwesenheit eines von — 1 verschiedenen Gravitationspotentials geändert werden. Nach der Einsteinschen Theorie sollen sich also die Geschwindigkeit des Lichts, die Schwingungszahlen der Spektrallinien, die Dimensionen der Atome und der aus ihnen zusammengesetzten Körper mit dem Gravitationspotential ändern, während nach meiner Theorie gar nichts von alledem zu bemerken sein soll.

8. Gleichheit der trägen und der schweren Masse abgeschlossener Systeme in den Theorien von Einstein und von Mie. Wie man nachweisen kann, daß die beiden Massen von abgeschlossenen Systemen gleich sind, hat Einstein in dem Referat seines auf der Wiener Naturforscherversammlung gehaltenen Vortrags angegeben[1]). Setzt man in die Grundgleichungen (2) die Werte (32) für h^{ε}_{mn} und (34) für h^{g}_{mn} ein, und beachtet man dabei zugleich (29), so lauten sie:

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial \mathfrak{k}_{mn\alpha}}{\partial x_\alpha} = -\varkappa\cdot\frac{\varrho}{\sqrt{-g^{\circ}_{44}}}\cdot\mathfrak{W}_m\cdot\mathfrak{W}_n + \varkappa\cdot\sum_{\mu,\nu,\alpha}\left(\gamma_{\alpha m}\cdot\mathfrak{g}_{\mu\nu\alpha}\cdot\mathfrak{k}_{\mu\nu n}-\frac{1}{2}\cdot\gamma_{mn}\cdot\mathfrak{g}_{\mu\nu\alpha}\cdot\mathfrak{k}_{\mu\nu\alpha}\right) - \sum_{\mu,\nu,\alpha}\gamma_{m\nu}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\mathfrak{k}^{\circ}_{\mu n\alpha}.$$

Man nimmt nun die vier Gleichungen, die einem festen Wert n entsprechen, wenn m die Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 durchläuft, multipliziert jede Gleichung mit g_{mn} und addiert, dann ergibt sich mit Benutzung von (20):

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\sum_{m} g_{mn}\cdot\mathfrak{k}_{mn\alpha} = -\varkappa\cdot(\mathfrak{W}_n\cdot\mathfrak{B}_n + H_g - \sum_{\mu,\nu}\mathfrak{k}_{\mu\nu n}\cdot\mathfrak{g}_{\mu\nu n})$$

oder nach (39):

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\sum_{m} g_{mn}\cdot\mathfrak{k}_{mn\alpha} = -\varkappa\cdot T_{nn}.$$

Ebenso bekommt man, wenn man die vier Gleichungen der Reihe nach mit g_{mp} multipliziert und dann addiert:

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\sum_{m} g_{mp}\cdot\mathfrak{k}_{mn\alpha} = -\varkappa\cdot(\mathfrak{W}_p\cdot\mathfrak{B}_n - \sum_{\mu,\nu}\mathfrak{g}_{\mu\nu p}\cdot\mathfrak{k}_{\mu\nu n}) = -\varkappa\cdot T_{pn}.$$

Es gilt also allgemein:

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\sum_{m} g_{mp}\cdot\mathfrak{k}_{mn\alpha} = -\varkappa\cdot T_{pn} \quad \begin{cases} p = n \text{ oder} \\ p \neq n. \end{cases} \tag{66}$$

Integriert man die Gleichungen (66) über das von dem abgeschlossenen System eingenommene Volumen und über eine Zeit, während der sich die Komponenten der schweren sowohl wie der trägen Masse des Systems nicht ändern, so erhält man:

$$g^1_{1\mu}\cdot m^{g}_{1\nu} + g^1_{2\mu}\cdot m^{g}_{2\nu} + g^1_{3\mu}\cdot m^{g}_{3\nu} + g^1_{4\mu}\cdot m^{g}_{4\nu} = m^{i}_{\mu\nu}. \tag{67}$$

Hier bedeutet $m^{i}_{\mu\nu}$ die Komponente (μ, ν) der trägen Masse, das folgende Integral:

$$m^{i}_{\mu\nu} = \int T_{\mu\nu}\cdot dV, \tag{68}$$

ferner bedeuten die $g^1_{\mu\nu}$ die Komponenten des Gravitationspotentials auf der Begrenzung des von dem abgeschlossenen System erfüllten Volumens. Wir nehmen, wie in Abschnitt 7 (S. 169), an, daß das Potential $(g^1_{\mu\nu})$ auf der ganzen Begrenzungsfläche als konstant angesehen werden darf.

Aus (67) lassen sich leicht die folgenden Gleichungen herleiten:

$$m^{g}_{\mu\nu} = \gamma^1_{\mu 1}\cdot m^{i}_{1\nu} + \gamma^1_{\mu 2}\cdot m^{i}_{2\nu} + \gamma^1_{\mu 3}\cdot m^{i}_{3\nu} + \gamma^1_{\mu 4}\cdot m^{i}_{4\nu}. \tag{69}$$

Wir wollen nun die Komponente m^{i}_{44} kurzweg als die träge Masse m_i des Systems bezeichnen:

$$m_i = \int T_{44}\cdot dV. \tag{70}$$

Bewegt sich das System mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ durch den Raum, so läßt sich aus dem Laueschen Satz leicht herleiten, daß

$$m^{i}_{\mu\nu} = -m_i\cdot\mathfrak{q}_\mu\cdot\mathfrak{q}_\nu \quad \begin{cases} \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_x,\ \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}_y,\ \mathfrak{q}_3 = \mathfrak{q}_z,\ \mathfrak{q}_4 = i\cdot. \end{cases} \tag{71}$$

Es folgt nun aus (69):

$$m^{g}_{\mu\nu} = -m_i\cdot\mathfrak{p}_\mu\cdot\mathfrak{q}_\nu \quad \mathfrak{p}_\mu = \gamma^1_{\mu 1}\cdot\mathfrak{q}_1 + \gamma^1_{\mu 2}\cdot\mathfrak{q}_2 + \gamma^1_{\mu 3}\cdot\mathfrak{q}_3 + \gamma^1_{\mu 4}\cdot\mathfrak{q}_4. \tag{72}$$

Die Gewichte von zwei materiellen Körpern, die sich in demselben Schwerefeld mit derselben Geschwindigkeit bewegen, sind mathematisch genau proportional ihren trägen Massen.

Damit haben wir nun den Satz, auf den Einstein, nachdem einmal das Prinzip der Identität beider Massen fallen mußte, noch so großen Wert legt. Es ist aber aus dem Gang des Beweises leicht zu erkennen, daß dieser Satz mit den eigentlichen Hauptannahmen der Einsteinschen Theorie, die ich auf S. 169 genannt habe, nichts zu tun hat, daß er vielmehr hauptsächlich auf den unwesentlichen Annahmen beruht, die Einstein noch nebenbei in die Theorie eingeführt hat. Vor allen Dingen muß

solutwert des Gravitationspotentials abhängen" (Postulat 4, Diese Zeitschr. 14, 1250, 1913). Das ist das Relativitätsprinzip des Gravitationspotentials, welches die Einsteinsche Theorie wirklich erfüllt.

1) Diese Zeitschr. 14, 1258, Gl. (7b), 1913.

man für den Beweis des Satzes unbedingt die Annahme (41):

$$H_e = T^e_{11} + T^e_{22} + T^e_{33} + T^e_{44}$$

und die Annahme (19) oder (30):

$$H_g = \frac{1}{2} \sum \mathfrak{g}_{\mu\nu\alpha} \cdot \mathfrak{k}_{\mu\nu\alpha}$$

als richtig anerkennen.

Welche Rolle diese beiden Annahmen in dem Beweis spielen, erkennt man am klarsten, wenn man sie auch in die von mir vorgeschlagene Gravitationstheorie einführt. Ich habe bei der Aufstellung meiner Theorie den Grundsatz gehabt, womöglich keine willkürlichen Nebenannahmen zu machen, sondern rein die Konsequenzen aus einer einzigen Hauptannahme zu entwickeln. Es ist das die Annahme, daß die schwere Masse völlig identisch ist mit der Ruhmasse. Gegen die Einführung der in Rede stehenden Nebenannahmen lassen sich, wie wir noch sehen werden, ganz bestimmte Gründe geltend machen. Wir wollen diese Gründe aber vorläufig ignorieren und beide Annahmen als richtig ansehen. Wir setzen also:

$$H = H_e + H_g, \quad T_{\alpha\beta} = T^e_{\alpha\beta} + T^g_{\alpha\beta}$$
$$H_e = T^e_{11} + T^e_{22} + T^e_{33} + T^e_{44}.$$
$$H_g = \frac{1}{2} \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{k}.$$

In der Theorie des skalaren Potentials ist dann [l. c. III, S. 34, Gl. (105)]:

$$T^g_{\alpha\alpha} = H_g - \mathfrak{g}_\alpha \cdot \mathfrak{k}_\alpha, \quad T^g_{\alpha\beta} = -\mathfrak{g}_\alpha \cdot \mathfrak{k}_\beta.$$

Eine ganz einfache Rechnung ergibt mit Benutzung der Gl. (85) in meiner Abhandlung III, S. 28:

$$\frac{\partial T^e_{\alpha 1}}{\partial x} + \frac{\partial T^e_{\alpha 2}}{\partial y} + \frac{\partial T^e_{\alpha 3}}{\partial z} - i \cdot \frac{\partial T^e_{\alpha 4}}{\partial t} =$$
$$= \frac{\partial H_g}{\partial \omega} \cdot \mathfrak{g}_\alpha - \mathfrak{g}_\alpha \left(\frac{\partial \mathfrak{k}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{k}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{k}_z}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right).$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial \mathfrak{k}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{k}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{k}_z}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\varkappa \cdot h,$$

wo h die Dichte der schweren Masse bedeutet [Gl. (86) l. c. III, S. 28], und weiter [Gl. (93) l. c. III, S. 30]:

$$-\varkappa \cdot h = \frac{\partial H}{\partial \omega}.$$

Trennen wir auch h in zwei Summanden: $h = h_e + h_g$, wo:

$$h_e = -\frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\partial H_e}{\partial \omega}, \quad h_g = -\frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\partial H_g}{\partial \omega},$$

so sieht man leicht, daß

$$\frac{\partial T^e_{\alpha 1}}{\partial x} + \frac{\partial T^e_{\alpha 2}}{\partial y} + \frac{\partial T^e_{\alpha 3}}{\partial z} - i \cdot \frac{\partial T^e_{\alpha 4}}{\partial t} = \varkappa \cdot h_e \cdot \mathfrak{g}_\alpha$$

ist. Da nun aber:

$$\frac{\partial T_{\alpha 1}}{\partial x} + \frac{\partial T_{\alpha 2}}{\partial y} + \frac{\partial T_{\alpha 3}}{\partial z} - i \cdot \frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial t} = 0,$$

so folgt hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T^e_{\alpha 1}}{\partial x} + \frac{\partial T^e_{\alpha 2}}{\partial y} + \frac{\partial T^e_{\alpha 3}}{\partial z} - i \cdot \frac{\partial T^e_{\alpha 4}}{\partial t} = \\ = -\varkappa \cdot h_e \cdot \mathfrak{g}_\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

eine Gleichung, die das genaue Analogon der Gleichung (38) in der Einsteinschen Theorie ist. Wir können (73) auffassen als die Bewegungsgleichung eines Teilchens, das die träge Masse

$$m_i = \int T^e_{44} \cdot dV \quad (74)$$

hat, und auf das außer den Kräften, welche den in den $T^e_{\alpha\beta}$ vorkommenden Zustandsgrößen des Äthers entsprechen, auch noch die Schwerkraft wirkt. Als schwere Masse des Teilchens ist zu rechnen:

$$m_g = \int h_e \cdot dV. \quad (75)$$

Ich führe nun die Hauptannahme ein, auf welcher meine Theorie beruht:

$$\left.\begin{aligned} h &= H \\ h_e &= H_e, \quad h_g = H_g. \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

Setze ich nach Gl. (41):

$$h_e = H_e = T^e_{11} + T^e_{22} + T^e_{33} + T^e_{44},$$

so ergibt der Lauesche Satz, wenn wir den Körper der Einfachheit halber als ruhend annehmen:

$$\left.\begin{aligned} \int h_e \cdot dV &= \int T^e_{44} \cdot dV \\ m_g &= m_i. \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

Der Lauesche Satz ist nämlich auf die beiden Summanden des Energietensors $T^e_{\alpha\beta}$ und $T^g_{\alpha\beta}$ einzeln anwendbar, weil im Innern eines vollständigen stationären Systems die beiden Komponenten des Energiestroms $T^e_{4\beta}$ und $T^g_{4\beta}$ einzeln verschwinden müssen.

Wenn man die Einsteinschen Nebenannahmen $H_e = T^e_{11} + T^e_{22} + T^e_{33} + T^e_{44}$ und $H_g = \frac{1}{2} \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{k}$ in die von mir vorgeschlagene Gravitationstheorie einführen wollte, so würden auch in dieser Theorie die Gewichte zweier materieller Körper, die sich in demselben Schwerefeld mit derselben Geschwindigkeit bewegen, ihren trägen Massen genau proportional sein.

Der Satz von der Gleichheit der beiden trägen Massen abgeschlossener Systeme ist nicht etwa eine Konsequenz der beiden Hauptannahmen der Einsteinschen Gravitationstheorie, der Annahme eines Tensorpotentials und der Annahme einer eigentümlichen Transformationseigenschaft der Grundgleichungen, sondern er folgt

aus den unwesentlichen, beiläufig gemachten Nebenannahmen der Theorie.

9. Innerer Widerspruch in den Einsteinschen Nebenannahmen. Da die Diagonalsumme $T_{11}+T_{22}+T_{33}+T_{44}$ ein vierdimensionaler Skalar ist, so folgt durch Transformation auf ein Koordinatensystem, in welchem das betrachtete abgeschlossene materielle System ruht:

$$\begin{aligned}&\int(T_{11}+T_{22}+T_{33}+T_{44})\cdot dV\\&=\int(T_{11}{}^0+T_{22}{}^0+T_{33}{}^0+T_{44}{}^0)\cdot\sqrt{1-q^2}\cdot dV_0\\&=\sqrt{1-q^2}\int T_{44}^0\cdot dV_0,\end{aligned}$$

wo q die Geschwindigkeit bedeutet, mit dem sich das materielle System in dem ersten Koordinatensystem bewegt. Da nun T_{44}^0 gleich der Dichtigkeit der Ruhenergie, also gleich H ist, so folgt:

$$\int(T_{11}+T_{22}+T_{33}+T_{44})\cdot dV=\int H\cdot dV. \quad (78)$$

Ist nun aber nach Annahme (41):

$$T_{11}^e+T_{22}^e+T_{33}^e+T_{44}^e=H_e,$$

so folgt aus (78):

$$\left.\begin{aligned}\int(T_{11}^e+T_{22}^e+T_{33}^e+T_{44}^e)\cdot dV=\\=\int H_g\cdot dV.\end{aligned}\right\} \quad (79)$$

Die Gleichung (79) steht direkt in Widerspruch mit der Nebenannahme (19). Schreibt man nämlich diese Nebenannahme in der Form (30), so ergibt sich aus (39):

$$T_{11}^e+T_{22}^e+T_{33}^e+T_{44}^e=2\cdot H_g. \quad (80)$$

Die beiden Nebenannahmen (19) und (41) der Einsteinschen Theorie stehen miteinander in Widerspruch.

Es ist bemerkenswert, daß diese beiden Annahmen gerade für den Beweis des Satzes von der Gleichheit der beiden Massen notwendig sind. Es wird wahrscheinlich nicht schwer sein, den inneren Widerspruch aus der Einsteinschen Theorie auszumerzen. Man darf aber wohl vermuten, daß mit der Beseitigung des inneren Widerspruchs zugleich der Satz von der Gleichheit beider Massen eines abgeschlossenen Systems fällt.

Aus den allgemeinen theoretischen Untersuchungen, die ich über die Natur der Materie angestellt habe, läßt sich erkennen, daß die Annahme (41) auch abgesehen von dem Widerspruch mit der Annahme (19) an sich unhaltbar ist. Ich kann sagen, daß diese Erkenntnis tatsächlich der Grund für mich gewesen ist, von vornherein auf den Satz von der Gleichheit der beiden Massen eines abgeschlossenen Systems zu verzichten; Überlegungen, wie die in Abschnitt 8 gebrachten, hätten ja sonst ziemlich nahe gelegen.

Anhang.

10. Die beiden Gravitationstheorien von Nordström. Herr Gunnar Nordström hat zwei verschiedene Theorien der Gravitation veröffentlicht, die er beide durch passende Abänderungen der (nicht mit dem Relativitätsprinzip übereinstimmenden) Abrahamschen Gravitationsgleichungen erhalten hat. Die erste dieser beiden Theorien ist von ihm zuerst gegen Ende des Jahres 1912 veröffentlicht worden[1]). In ihr wird die Ruhdichte der Energie in drei Summanden zerlegt:

$$H=H_e+H_f+H_g,$$

von denen der zweite nur von den elastischen Spannungen der Materie, der dritte nur von der Feldstärke der Gravitation, der erste von allen übrigbleibenden Zustandsgrößen abhängt. Herr Nordström nennt H_e speziell die Ruhdichte der trägen Masse der Materie und setzt:

$$\frac{\partial H}{\partial\omega}=-\varkappa\cdot H_e.$$

Es ist demnach in dieser Nordströmschen Theorie:

$$H=e^{-\varkappa\omega}\cdot H_e'+H_f+H_g,$$

wo H_e' ebenso wie H_f und H_g nicht mehr vom Gravitationspotential ω abhängt.

Man sieht, daß diese Theorie der von mir vorgeschlagenen ziemlich ähnlich ist. Bei mir ist:

$$H=e^{-\varkappa\omega}\cdot H',$$

wo H' nicht mehr von ω abhängt, ich habe also die etwas künstliche Zerlegung von H in drei Summanden vermieden.

Die Bezeichnungsweise Nordströms ist von der meinigen sehr abweichend, man muß setzen:

$$H_e=\nu,\quad \varkappa=\frac{g}{c^2},\quad \omega=-\Phi,$$

$$\mathfrak{g}_x=\mathfrak{f}_x=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\ \text{usw.},$$

um die Nordströmschen Gleichungen zu bekommen, außerdem muß man beachten, daß ich die Lichtgeschwindigkeit im idealen Vakuum, die Nordström c nennt, gleich 1 gesetzt habe.

Die zweite, erst kürzlich erschienene Theorie Nordströms[2]) — nebenbei bemerkt die Theorie, von der Herr Einstein in seinem Wiener Vortrag gesprochen hat[3]), während ich in der Dis-

1) Diese Zeitschrift **13**, 1126, 1912; Ann. d. Phys. **40**, 856, 1913.

2) Ann. d. Phys. **42**, 533, 1913.

3) In seinem Vortrag „Zum gegenwärtigen Stand des Gravitationsproblems" hat Herr Einstein von anderen Theorien als der seinigen nur diese zweite Nordströmsche Theorie genannt. Die Besprechung der Abrahamschen Theorie, die sich in dem Referat in dieser Zeitschrift **14**, 1250, 1913 findet, kam in dem Vortrag selber nicht vor. Ich möchte das hier erwähnen, um meine Bemerkungen zu Beginn der Diskussion zu erklären (diese Zeitschrift **14**, 1262, 1913).

kussion die damals allein veröffentlichte ältere Theorie gemeint habe — enthält die beiden Annahmen, daß H in zwei Summanden zu zerlegen ist:

$$H = H_e + H_g,$$

von denen nur der zweite von der Feldstärke der Gravitation $(\mathfrak{z}, i\mathfrak{u})$ abhängt, und daß:

$$H_g = \frac{1}{2}\cdot(\mathfrak{z}^2 - \mathfrak{u}^2).$$

Das Gravitationspotential ω soll, wie bei der ersten Nordströmschen Theorie, nur in H_e stecken. Ferner wird für die Dichte der schweren Masse h angenommen [l. c. Gl. (1), (2), (14), (15)]:

$$h = \frac{v}{1 - \varkappa\cdot\omega}$$

$$v = T_{11}^e + T_{22}^e + T_{33}^e + T_{44}^e.$$

Endlich soll [l. c. Gl. (27)] die Größe:

$$\frac{v}{(1-\varkappa\cdot\omega)^4}$$

nicht von ω abhängen.

Diese Annahmen schließen aber einen schweren innern Widerspruch ein. Denn wenn man beachtet, daß das Energieprinzip, wie ich in meiner Abhandlung III auf S. 30 bewiesen habe, nur dann erfüllt sein kann, wenn

$$-\varkappa h = \frac{\partial H}{\partial \omega}$$

oder, da H_g bei Nordström von ω unabhängig ist:

$$-\varkappa h = \frac{\partial H_e}{\partial \omega}$$

so sieht man, daß aus den Nordströmschen Annahmen folgt:

$$\frac{1}{(1-\varkappa\omega)^3}\cdot\frac{\partial H_e}{\partial \omega} = -\varkappa\cdot H_e' = -\varkappa\cdot\frac{T_{11}^e + T_{22}^e + T_{33}^e + T_{44}^e}{(1-\varkappa\omega)^4},$$

wo H_e' eine von ω unabhängige Größe bedeuten soll. Durch Integration ergibt sich, daß:

$$H_e = \frac{1}{4}(1-\varkappa\omega)^4\cdot H_e' = \frac{1}{4}\cdot(T_{11}^e + T_{22}^e + T_{33}^e + T_{44}^e).$$

Es ist also:

$$\int H_e\cdot dV = \frac{1}{4}\cdot\int(T_{11}^e + T_{22}^e + T_{33}^e + T_{44}^e)\cdot dV,$$

wo das Integral über das Volumen eines abgeschlossenen Systems ausgeführt werden soll.

Nach dem Laueschen Satz muß jedoch sein:

$$\int H_e\cdot dV = \int(T_{11}^e + T_{22}^e + T_{33}^e + T_{41}^e)\cdot dV.$$

Danach müssen die Annahmen, die Herr Nordström macht, irgendwie zu Widersprüchen mit dem Energieprinzip führen, was natürlich nicht sein darf. Ich habe nicht näher untersucht, ob und wie sich dieser Fehler aus dem Nordströmschen Ansatz beseitigen läßt, und möchte diese Theorie hier deswegen nicht näher besprechen, obwohl ich glaube, daß sie bei konsequenter Durchführung recht interessant wäre.

Die Bezeichnungsweise ist dieselbe, wie in den älteren Nordströmschen Arbeiten. In einigen Formeln wird statt Φ gesetzt: $\Phi - \Phi_0$, so ist beispielsweise:

$$1 - \varkappa\omega = 1 + \frac{g}{c^2}\cdot(\Phi - \Phi_0),$$

ferner wird gesetzt:

$$\frac{\varkappa}{1-\varkappa\cdot\omega} = \frac{g}{1 + \frac{g}{c^2}\cdot(\Phi - \Phi_0)} = g(\Phi)$$

und:

$$\frac{1-\varkappa\cdot\omega}{\varkappa} = \frac{c^2}{g} + \Phi - \Phi_0 = \Phi'.$$

Schluß.

11. Zusammenfassung. Über das eigentliche Ziel seiner Untersuchungen hat sich Herr Einstein in seinem Wiener Vortrag sehr ausführlich ausgesprochen.

1. Es wird in seinen Arbeiten ein Versuch unternommen, die Relativitätstheorie zu erweitern, und zwar soll das Relativitätsprinzip, das zunächst nur für gleichförmige Bewegungen gilt, auf beschleunigte Bewegungen ausgedehnt werden, zum mindesten auf gleichmäßig beschleunigte. Es kommt das, wie Herr Einstein selber hervorhebt, darauf hinaus, eine Kovarianz der Naturgesetze nicht nur gegenüber linearen Substitutionen, sondern auch gegenüber nichtlinearen Substitutionen zu fordern.

2. Die Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips soll dadurch erreicht werden, daß die beschleunigte Bewegung eines materiellen Systems sich vollkommen durch ein Schwerefeld ersetzen läßt. Wie Herr Einstein sagt, kann ein auf seinem Standpunkt stehender Physiker das Gravitationsfeld als „scheinbar" bezeichnen, weil sich durch eine gewisse Transformation der Grundgleichungen der Physik immer erreichen läßt, daß das Gravitationsfeld an der betrachteten Stelle verschwindet und durch einen mit ihm äquivalenten Beschleunigungszustand ersetzt wird. Umgekehrt kann man natürlich auch ebensogut eine Beschleunigung des Systems als scheinbar bezeichnen. Diese Hypothese der Äquivalenz von Schwerefeld und Beschleunigung ist natürlich nur dann durchzuführen, wenn träge Masse und schwere Masse in ihrem Wesen identisch sind.

Bei aller Anerkennung der außerordentlich scharfsinnigen und mühsamen Arbeit, die Herr Einstein zur Erreichung des gesteckten Zieles aufgewendet hat, kann man doch nicht anders sagen, als daß sein Versuch nur ein negatives Resultat gehabt hat.

1. Die Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips, die in der Einsteinschen Arbeit erreicht worden ist, bezieht sich nur auf lineare Transformationen, hat also mit beschleunigten Bewegungen gar nichts zu tun. Ich habe in der vorliegenden Untersuchung nachgewiesen, daß diese „Verallgemeinerung" weiter nichts bedeutet, als daß außer der Relativität der Bewegungen noch eine Relativität des Gravitationspotentials existiert. Diese zweite Relativität gilt auch in meiner Theorie, und zwar ist sie hier mit äußerst einfachen Mitteln erreicht.

2. Die Äquivalenzhypothese scheint mir schon aus dem Grunde hinfällig zu werden, weil von einer Identität der trägen und der schweren Masse in der Einsteinschen Theorie gar nicht die Rede sein kann. Allerdings wird durch die Einführung einiger Nebenannahmen der Satz gewonnen, daß die schwere und die träge Masse abgeschlossener Systeme einander streng proportional sind. Aber dieser Satz ist keineswegs, wie es nach der Äquivalenzhypothese sein müßte, eine Folge der Transformationseigenschaften der Grundgleichungen, er würde ebensogut in meiner Theorie gelten, wenn man die eben erwähnten Nebenannahmen auch in ihr einführen wollte. Es hat sich weiter gezeigt, daß diese Nebenannahmen einen inneren Widerspruch enthalten, und somit ist der Satz von der Gleichheit der beiden Massen auch in der bescheidenen Fassung, die er schließlich bekommen hat, nicht zu halten.

Als ein positives Resultat der vorliegenden Untersuchung nenne ich den Nachweis, daß in einer beliebigen Theorie, in welcher die schwere Masse ein vierdimensionaler Tensor ist, eine Identität des Tensors der schweren Masse mit dem Tensor der trägen Masse schlechterdings unmöglich ist. Soviel ich sehe, ist damit wohl überhaupt nachgewiesen, daß ein Prinzip von der Identität beider Massen nicht gelten kann. Ob man von hier aus weiter dazu kommen kann, die Unmöglichkeit der Einsteinschen Äquivalenzhypothese allgemein nachzuweisen, läßt sich ohne genauere Untersuchung nicht sagen, es scheint mir aber sehr wohl möglich. Jedenfalls möchte ich glauben, daß das Mißlingen des Einsteinschen Versuchs durch die Unmöglichkeit des Erfolges zu erklären ist. In der Diskussion zu dem Einsteinschen Vortrag habe ich darauf hingewiesen, daß eine Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips, wie sie Einstein beabsichtigt, voraussichtlich immer zu Widersprüchen mit den allgemeinen Prinzipien der physikalischen Forschung führen wird (diese Zeitschrift **14**, 1264). Es wäre nun interessant, wenn man von einem andern Gesichtspunkt aus die Unmöglichkeit der Verallgemeinerung mathematisch streng nachweisen könnte. In diesem Zusammenhang scheint mir ein von Herrn Einstein angekündigter Satz (diese Zeitschrift **14**, 1257) bedeutungsvoll zu sein, nach welchem sich kein System von Grundgleichungen aufstellen lassen soll, die sämtlich für beliebige Substitutionen kovariant sind.

Greifswald, Physik. Institut, 24. Dezember 1913.

(Eingegangen 28. Dezember 1913.)

Prinzipielles zur verallgemeinerten Relativitätstheorie und Gravitationstheorie.

Von A. Einstein.

Den Anlaß zu den nachfolgenden Erörterungen gibt mir eine Kritik, welche Herr Mie in dieser Zeitschrift[1]) der von mir unter Beihilfe von Herrn Großmann ausgearbeiteten Theorie widmet. Ich bin mit dem Ergebnis dieser Kritik nicht einverstanden und kann mich dem Eindruck nicht verschließen, daß Herr Mie meine theoretischen Absichten nicht richtig aufgefaßt hat. Gleichzeitig glaube ich aber, daß die Unvollkommenheit meiner bisherigen Darstellung der Hauptgedanken der Theorie an diesem Mißverständnis die Schuld trägt. Diese Unvollkommenheit rührt daher, daß ich in mancher Beziehung selbst noch nicht zu voller Klarheit gelangt war. Ich will deshalb hier die prinzipiellen Fragen der Reihe nach kurz durchgehen, wobei ich aber voraussetze, daß der Leser die Theorie bereits kenne, was ihren formalen Inhalt betrifft.

1. Die gegenwärtig als „Relativitätstheorie" bezeichnete Theorie ist auf die Annahme gegründet, daß es gewissermaßen präexistierende „bevorzugte" Bezugssysteme K gebe, auf die bezogen die Naturgesetze eine besonders einfache Form annehmen, trotzdem man vergeblich die Frage aufwirft, wodurch die Bevorzugungen jener Bezugssysteme K gegenüber anderen Bezugssystemen K' (z. B. „rotierenden") bedingt sein könnte. Es liegt hierin meiner Ansicht nach ein schwerer Mangel dieser Theorie. Jene bevorzugten Bezugssysteme werden festgelegt als solche, inbezug auf welche das Prinzip von der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit gültig sein soll. Man kann nicht daran zweifeln, daß diesem Prinzip eine weitgehende Bedeutung zukommt; und doch kann ich nicht an seine genaue Gültigkeit glauben. Es erscheint mir unglaublich, daß der Ablauf irgendeines Vorganges (z. B. der der Lichtausbreitung im Vakuum) als unabhängig von allem übrigen Geschehen in der Welt aufgefaßt werden könne. Wie man über derartige Argumente auch denken mag,

[1]) **15**, 115, 169, 1914.

jedenfalls ist es interessant, sich die Frage vorzulegen: Inwieweit ist es möglich, eine Relativitätstheorie aufzubauen, die das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nicht zur Grundlage hat?

2. Die bisherige Relativitätstheorie fließt formal aus der Voraussetzung, daß für jede berechtigte Substitution der Raum-Zeit-Variabeln

$$ds^2 = \Sigma dx_\nu^2 \qquad (1)$$

eine Invariante sei, welche Voraussetzung aus dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit stammt. Als berechtigte Substitutionen treten demnach nur die linearen orthogonalen Substitutionen auf. Die Gleichung des frei bewegten Massenpunktes in Hamiltonscher Form ist:

$$\delta\{\int ds\} = 0. \qquad (2)$$

In dem Falle nun, daß wir das Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit fallen lassen, gibt es a priori keine bevorzugten Koordinatensysteme. Es können deshalb die Koordinaten x_ν durch vorläufig ganz beliebige Funktionen dieser Größen ersetzt werden. Gibt es dann auch vierdimensionale Gebiete, in denen sich der materielle Punkt bei passender Wahl der Koordinaten x_ν gemäß (2) und (1) bewegt, so ist dies doch nicht mehr als das allgemeine Bewegungsgesetz des kräftefrei bewegten Punktes anzusehen. Es ergibt sich statt dessen Gleichung (2) in Verbindung mit

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \qquad (1a)$$

wobei die Größen $g_{\mu\nu}$ Funktionen der x_ν sind.

3. Dies Bewegungsgesetz [(2), (1a)] ist zunächst nur für den Fall abgeleitet, daß sich der Punkt ganz kräftefrei bewegt, daß also auf den Punkt auch kein Gravitationsfeld einwirkt (von einem geeigneten Bezugssystem aus beurteilt). Da aber erfahrungsgemäß das Bewegungsgesetz eines materiellen Punktes im Schwerefelde nicht vom Material des Körpers abhängt, und da es jedenfalls möglich sein dürfte, jenes Gesetz auf die Hamiltonsche Form zu bringen, so liegt es nahe, [(2), (1a)] allgemein als das Bewegungsgesetz eines Punktes anzusehen, auf welchen keine anderen als Gravitationskräfte wirken. Dies ist der Kern der „Äquivalenzhypothese".

4. Nach dem Gesagten haben wir die Funktionen $g_{\mu\nu}$ als die Komponenten des Gravitationsfeldes in bezug auf das ganz beliebig gewählte Bezugssystem aufzufassen. Da die Hamiltonsche Bewegungsgleichung die Bewegung des Punktes ganz unabhängig von der Wahl des Bezugssystems bestimmen muß, so ist $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ als eine Invariante bezüglich aller Substitutionen aufzufassen. Die positiv genommene Wurzel dieser Größe bezeichnen wir als das (vierdimensionale) Linienelement der zeit-räumlichen Mannigfaltigkeit.

5. Auf die Invariante (1) hat Minkowski eine vierdimensionale Kovariantentheorie gegründet, welche die Gleichungen der ursprünglichen Relativitätstheorie liefert. In analoger Weise läßt sich auf die Invariante (1a) vermittelst des „absoluten Differentialkalküls" eine Kovariantentheorie gründen, welche die entsprechenden Gleichungen der neuen Relativitätstheorie liefern. In diesen Gleichungen treten die Größen $g_{\mu\nu}$ auf, so daß erstere ohne weiteres den Einfluß zu finden gestatten, den das Gravitationsfeld auf irgendwelche physikalischen Vorgänge ausübt. Die Gleichungen der neuen Relativitätstheorie gehen in diejenigen der ursprünglichen über in dem Spezialfalle, daß man die $g_{\mu\nu}$ als konstant betrachten kann (bei passender Wahl der x_ν); es ist dies der Spezialfall, bei welchem das Gravitationsfeld zu vernachlässigen ist. Es ist für die Theorie wesentlich, daß (1a) beliebigen Transformationen gegenüber invariant ist. Hierauf ist es zurückzuführen, daß die Durchführung der Theorie trotz des Auftretens der $g_{\mu\nu}$ ohne Willkür vor sich gehen kann.

6. Die neue Relativitätstheorie hat aber noch ein Problem zu lösen, dem kein entsprechendes der ursprünglichen Relativitätstheorie zur Seite steht. Sie hat nämlich auch Gleichungen zu liefern, denen das Gravitationsfeld selbst genügt, d. h. Gleichungen, aus denen die Größen $g_{\mu\nu}$ zu berechnen sind, wenn die auf die materiellen Vorgänge sich beziehenden Größen bekannt sind. Das energetische Verhalten eines Systems wird durch einen Energietensor $\frac{\mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\sqrt{-g}}$ (gemischter Tensor) charakterisiert. Da Energie und Trägheit einerseits, Trägheit und Schwere andererseits, einander bedingen, so ist zu fordern, daß das Gravitationsfeld durch die Größen $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ bestimmt wird. Es sind also Differentialgleichungen zu suchen, welche als Verallgemeinerung von Poissons Gleichung aufzufassen sind, welche also die $g_{\mu\nu}$ aus den $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ zu berechnen erlauben; dabei müssen diese Gleichungen allgemein kovariant sein.

7. Diesen Zusammenhang zwischen den $g_{\mu\nu}$ und $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ haben wir nicht in allgemein kovarianter Form aufstellen können; und dieser Umstand ist es, aus dem die Fachkollegen unserer Theorie den verhängnisvollen Strick drehen zu sollen glauben. Ich will im folgenden darlegen, warum sie hierin nach meiner Ansicht nicht recht haben. —

Wenn Gleichungen zwischen irgendwelchen

Größen[1]) gegeben sind, die nur bei spezieller Wahl des Koordinatensystems gültig sind, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Es entsprechen den Gleichungen allgemein kovariante, d. h. bezüglich beliebiger Bezugssysteme gültige Gleichungen;

2. es gibt keine allgemein kovarianten Gleichungen, die aus den für spezielle Wahl des Bezugssystems gegebenen Gleichungen gefolgert werden können.

Im Falle 2 sagen die Gleichungen über die durch die Größen dargestellten Dinge gar nichts aus; sie beschränken nur die Wahl des Bezugssystems. Sagen die Gleichungen über die durch die Größen dargestellten Dinge überhaupt etwas aus, so liegt stets der Fall 1 vor, d. h. es existieren dann stets allgemein kovariante Gleichungen zwischen den Größen.

Wenn wir also, ohne die allgemein kovarianten Gleichungen des Gravitationsfeldes zu kennen, das Bezugssystem spezialisieren und die Feldgleichungen der Gravitation nur für die speziellen Bezugssysteme aufstellen, so setzen wir die Theorie keinem anderen Einwande aus als demjenigen, daß die aufgestellten Gleichungen vielleicht ohne jeden physikalischen Inhalt sein könnten. An eine Berechtigung dieses Einwandes wird aber im vorliegenden Falle niemand im Ernst denken.

8. „Ganz richtig", denkt der Leser, „aber die Tatsache, daß die Herren Einstein und Großmann nicht imstande sind, die Gleichungen des Gravitationsfeldes in allgemein kovarianter Form anzugeben, ist für mich kein hinreichender Grund dafür, einer Spezialisierung des Bezugssystems zuzustimmen." Es gibt aber zwei gewichtige Argumente, welche diesen Schritt rechtfertigen, von denen das eine logischen, das andere empirischen Ursprungs ist:

a) Wenn das Bezugssystem ganz willkürlich gewählt wird, dann können die $g_{\mu\nu}$ durch die $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ überhaupt nicht vollständig bestimmt sein. Man denke sich nämlich die $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ überall gegeben, und es mögen in einem Teil Φ des vierdimensionalen Raumes alle $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ verschwinden. Ich kann nun ein neues Bezugssystem einführen, welches außerhalb Φ mit dem ursprünglichen vollkommen übereinstimmt, innerhalb Φ aber (ohne Verletzung der Stetigkeit) von ihm verschieden ist. Bezieht man nun alles auf dieses neue Bezugssystem, wobei die Materie durch $\mathfrak{T}_{\mu\nu}'$, das Gravitationsfeld durch $g_{\mu\nu}'$ ausgedrückt wird, so ist zwar überall

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu}' = \mathfrak{T}_{\mu\nu},$$

dagegen werden im Innern von Φ die Gleichungen

$$g_{\mu\nu}' = g_{\mu\nu}$$

sicherlich nicht alle erfüllt sein[1]). Hieraus folgt die Behauptung.

Will man erzielen, daß eine vollständige Bestimmung der $g_{\mu\nu}$ (Gravitationsfeld) aus den $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ (Materie) möglich sei, so kann dies nur durch Beschränkung in der Wahl des Bezugssystems erreicht werden.

b) In der ursprünglichen Relativitätstheorie wird das Erhaltungsgesetz des Impulses und der Energie durch eine Gleichung von der Form

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (3)$$

ausgedrückt. Die entsprechende, durch den absoluten Differentialkalkül gelieferte Gleichung ist

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\nu\tau} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\mu} \gamma_{\alpha\tau} \mathfrak{T}_{\tau\nu}. \qquad (4)$$

Die Gleichung (4) hat nicht mehr die Gestalt eines reinen Erhaltungssatzes. Es ist dies vom physikalischen Standpunkt insofern verständlich, als die Materie, für sich allein betrachtet, bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes die Erhaltungssätze deshalb nicht erfüllen kann, weil das Gravitationsfeld Impuls und Energie auf die Materie überträgt. Dies findet seinen Ausdruck in der rechten Seite der Gleichung (4). Sollen aber die Erhaltungssätze überhaupt gültig bleiben, so müssen wir fordern, daß für Materie und Gravitationsfeld zusammen Erhaltungssätze von der Gestalt (3) bestehen. Es wird dann ein Gleichungssystem von der Form

$$\sum_{\nu} \frac{\partial (\mathfrak{T}_{\mu\nu} + \mathfrak{t}_{\mu\nu})}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (5)$$

gelten müssen, wobei $\mathfrak{t}_{\mu\nu}$ nur von den $g_{\mu\nu}$ und ihren Ableitungen abhängen. Allgemein kovariante Gleichungssysteme vom Typus der Gleichungen (5) gibt es aber nicht. Eine nähere Betrachtung zeigt vielmehr, daß solche Systeme nur linearen Transformationen gegenüber kovariant sind. Indem wir verlangen, daß die Feldgleichungen der Gravitation derart zu formulieren seien, daß in dieser Formulierung die Gültigkeit der Erhaltungssätze zum Ausdruck gelangt, beschränken wir also die Wahl des Bezugssystems in der Art, daß nur mehr lineare Transformationen von einem berechtigten Bezugssystem zu einem anderen hinführen.

9. Wie die Gravitationsgleichungen mit Bezug auf die so spezialisierten Bezugssysteme zu finden

1) Die Transformationseigenschaften der Größen selbst müssen natürlich hierbei als für beliebige Transformationen gegeben betrachtet werden.

1) Die Gleichungen sind so zu verstehen, daß auf den linken Seiten jeweilen den unabhängigen Variabeln x_ν' dieselben Zahlenwerte erteilt werden wie auf den rechten Seiten den Variabeln x_ν.

sind, habe ich mehrfach dargelegt. Man frägt: Was für Differentialausdrücken aus den $g_{\mu\nu}$ sind die $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ gleichzusetzen, damit die Gleichungen (4) in die Gleichungen (5) übergehen, wenn ich in die rechten Seiten von (4) für die $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ ihre Ausdrücke in den $g_{\mu\nu}$ einsetze? Diese Fragestellung führt zu den Differentialgleichungen

$$\sum_{\alpha\beta\mu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\,\gamma_{\alpha\beta}\,g_{\sigma\mu}\,\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) = \varkappa(\mathfrak{T}_{\sigma\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma\nu}), \qquad (6)$$

wobei gesetzt ist

$$-2\varkappa \mathfrak{t}_{\sigma\nu} = \sqrt{-g}\left(\sum_{\beta\tau\varrho} \gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\delta_{\sigma\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\right).$$

Hierbei ist $\delta_{\sigma\nu} = 1$ oder 0, je nachdem $\sigma = \nu$ oder $\sigma \neq \nu$ ist. Daß diese Gleichungen linearen Transformationen gegenüber kovariant sind, ist leicht zu zeigen.

Es ist zweifellos, daß diesen Gleichungen eine, wenn auch geringere Zahl von allgemein kovarianten Gleichungen entspricht, deren Aufstellung aber weder vom physikalischen noch vom logischen Standpunkte von besonderem Interesse ist, wie aus den unter 8 gegebenen Überlegungen deutlich hervorgeht. Prinzipiell wichtig aber ist uns die Erkenntnis, daß den Gleichungen (6) entsprechende allgemein kovariante existieren müssen. Denn nur in diesem Falle war es gerechtfertigt, die Kovarianz der übrigen Gleichungen der Theorie beliebigen Substitutionen gegenüber zu fordern. Es entsteht andererseits die Frage, ob jene anderen Gleichungen durch die Spezialisierung des Bezugssystems keine Spezialisierung erfahren. Dies scheint im allgemeinen nicht der Fall zu sein.

10. Aus der vorstehenden Darstellung der Grundlagen der Theorie erkennt man, daß zu deren Begründung irgendwelche spezielle Annahmen nicht benutzt werden müssen. Daß dies gemäß der neulich von Mie in dieser Zeitschrift gegebenen Darstellung anders ist, rührt daher, daß Mie nur die kovariantentheoretischen Forderungen der gewöhnlichen Relativitätstheorie als heuristisches Hilfsmittel benutzt, daß er also die a priori bevorzugten Bezugssysteme einführt. In dieser Weise betrachtet, hat die von mir vertretene Theorie tatsächlich eine recht geringe Daseinsberechtigung! Ich hoffe aber, durch die vorliegende Betrachtung meine Auffassungsweise klar gemacht zu haben.

11. Ich komme endlich noch einmal auf den Satz von der Identität der trägen und schweren Masse und auf den Zusammenhang von Masse und Energie zurück.

Der negativ genommene Impuls eines materiellen Punktes bildet zusammen mit dessen Energie einen kovarianten Vierervektor mit den Komponenten

$$m\sum_\nu g_{\sigma\nu}\frac{dx_\nu}{ds}.$$

Ebenso bildet[1]) der negativ genommene Impuls zusammen mit der Energie eines vollständigen physikalischen Systems den kovarianten Vierervektor

$$\int(\mathfrak{T}_{\sigma 4} + \mathfrak{t}_{\sigma 4})\,dV.$$

Hieraus folgt sofort, daß die Trägheitseigenschaften eines abgeschlossenen Systems dieselben sind wie die eines materiellen Punktes, daß also das System durch einen materiellen Punkt ersetzbar ist (als Ganzes). Um die Gesamtmasse des abgeschlossenen Systems in einfacher Weise darzustellen, bilden wir die Komponenten dieser beiden Vierervektoren für den Fall, daß das Bezugssystem in der Weise gewählt ist, daß der materielle Punkt relativ zu ihm ruht, und daß die $g_{\sigma\nu}$ im Unendlichen dieselben Werte haben wie bei der gewöhnlichen Relativitätstheorie. Bei dieser Wahl des Bezugssystems haben die beiden einander gleichzusetzenden Vektoren die Komponenten

$m\sum g_{\sigma\nu}\frac{dx_\nu}{ds}$	0	0	0	mc
$\int(\mathfrak{T}_{\sigma 4} + \mathfrak{t}_{\sigma 4})\,dV$	$\int(\mathfrak{T}_{14} + \mathfrak{t}_{14})\,dV$	$\int(\mathfrak{T}_{24} + \mathfrak{t}_{24})\,dV$	$\int(\mathfrak{T}_{34} + \mathfrak{t}_{34})\,dV$	$\int(\mathfrak{T}_{44} + \mathfrak{t}_{44})\,dV$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Masse des Systems gleich ist der so gemessenen, mit c dividierten Gesamtenergie des Systems. c ist dabei die Vakuumlichtgeschwindigkeit im Unendlichen ($c = \sqrt{g_{44}}$), welche übrigens beliebig angenommen werden kann, indem sie von der Wahl des Bezugssystems abhängt, soweit diese oben noch nicht festgelegt ist.

Daß auch die schwere Masse eines abgeschlossenen Systems in dem angegebenen Sinne der Energie des Systems gleich ist, falls das System ein stationäres ist, erhellt unmittelbar, wenn man die Gleichungen (6) über ein sehr großes, das System enthaltende Volumen inte-

[1]) Diese Zeitschr. 15, 198, 1914.

griert, wobei man das Bezugssystem wählt wie oben.

Im vorstehenden glaube ich alle gegen meine zusammen mit Herrn Großmann ausgearbeitete Gravitationstheorie bisher erhobenen Einwände widerlegt zu haben. Ich bitte diejenigen Kollegen, welche sich ebenfalls an der Klärung der hierher gehörigen Fragen beteiligen wollen, sich an die vorstehenden Darlegungen zu halten, welche eine für die Diskussion geeignete Grundlage bilden dürften.

Januar 1914.

(Eingegangen 24. Januar 1914.)

Raumgitterschwingungen und spezifische Wärmen mehratomiger fester Körper. II[1].

Von Hans Thirring.

§ 2. Die spezifischen Wärmen zweiatomiger Körper.

Die Formeln (3) und (6), die für das einfache Gitter die spezifische Wärme ergaben, sind für das zweiatomige noch ein wenig umzuformen. Wie wir früher sahen, tritt jede Schwingung zweimal auf, wenn wir φ, ψ, χ alle Werte von 0 bis 2π durchlaufen lassen; wir werden also statt (3) zu schreiben haben:

$$E = \frac{1}{2} N_s \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{k=1}^{6} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\nu_k)\, d\varphi\, d\psi\, d\chi. \quad (3')$$

Wir wollen die spezifische Wärme für ein Grammatom = ein halbes Mol unserer zweiatomigen Substanzen beziehen, dann wird N_s, die Zahl der Gitterpunkte, gleich N, daher

$$E = \frac{1}{2} \frac{RT}{(2\pi)^3} \sum_{k=1}^{6} \int\int\int \frac{\beta' \frac{\nu_k}{T}}{e^{\beta' \frac{\nu_k}{T}} - 1}\, d\varphi\, d\psi\, d\chi,$$

und durch Entwickeln in die bekannte Reihe und Differentiation nach T:

$$C = \frac{dE}{dT} = \frac{1}{2} \frac{R}{(2\pi)^3} \int\int\int \left\{ 6 - \frac{B_2}{2!}\left(\frac{\beta'}{T}\right)^2 s_1 + 3\,\frac{B_4}{4!}\left(\frac{\beta'}{T}\right)^4 s_2 - \cdots \right\} d\varphi\, d\psi\, d\chi.$$

Wir werden also, um die Reihe (5) verwenden zu können, für die I_k zu setzen haben:

$$I_k = \frac{1}{6} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} s_k\, d\varphi\, d\psi\, d\chi. \quad (6')$$

Durch (5) und (6') ist die spezifische Wärme gegeben; es handelt sich also nur mehr um die Berechnung der

$$s_k = \sum_{k=1}^{6} \nu_k^{2k}.$$

Die Formeln werden natürlich noch komplizierter als im Falle des einatomigen Gitters, so daß es mir nur gelungen ist, die ersten drei Koeffizienten I_1, I_2 und I_3 zu berechnen. Im folgenden sind zunächst die symmetrischen Grundfunktionen der Wurzeln von (11) angegeben:

$$\begin{aligned}
2\pi^2 p_1 &= \frac{1}{M}(A_1 + A_2 + A_3) + \frac{1}{m}(A_1' + A_2' + A_3'),\\
(2\pi^2)^2 p_2 &= \frac{1}{M^2}[A_2A_3 + A_3A_1 + A_1A_2 + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2] +\\
&\quad + \frac{1}{m^2}[A_2'A_3' + A_3'A_1' + A_1'A_2' + B_1'^2 + B_2'^2 + B_3'^2] +\\
&\quad + \frac{1}{mM}[A_1A_1' + A_2A_2' + A_3A_3' + A_2A_3' + A_3A_1' + A_1A_2' + A_2'A_3 + A_3'A_1 +\\
&\qquad + A_1'A_2 + C_1^2 + C_2^2 + C_3^2],\\
(2\pi^2)^3 p_3 &= \frac{1}{M^3}[A_1A_2A_3 - (A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + A_3B_3^2) + 2B_1B_2B_3] +\\
&\quad + \frac{1}{m^3}[A_1'A_2'A_3' - (A_1'B_1'^2 + A_2'B_2'^2 + A_3'B_3'^2) + 2B_1'B_2'B_3'] +\\
&\quad + \frac{1}{M^2m}\{(A_1' + A_2' + A_3')[A_2A_3 + A_3A_1 + A_1A_2 - (B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)] -\\
&\qquad - C_1^2(A_2 + A_3) - C_2^2(A_3 + A_1) - C_3^2(A_1 + A_2)\} +\\
&\quad + \frac{1}{m^2M}\{(A_1 + A_2 + A_3)[A_2'A_3' + A_3'A_1' + A_1'A_2' - (B_1'^2 + B_2'^2 + B_3'^2)] -\\
&\qquad - C_1^2(A_2' + A_3') - C_2^2(A_3' + A_1') - C_3^2(A_1' + A_2')\}.
\end{aligned} \quad (18)$$

Durch Anwendung der Newton-Girardschen Formeln ergeben sich daraus die s_k:

1) I: Diese Zeitschrift 15, 127, 1914.

$$
\begin{aligned}
& s_1 = p_1, \\
& (2\pi^2)^2 s_2 = \frac{1}{M^2}[A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)] + \\
& \quad + \frac{1}{m^2}[A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2 + 2(B_1'^2 + B_2'^2 + B_3'^2)] + \frac{1}{mM}(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2), \\
& (2\pi^2)^3 s_3 = \frac{1}{M^3}[A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + 3A_1(B_2^2 + B_3^2) + 3A_2(B_3^2 + B_1^2) + 3A_3(B_1^2 + B_2^2) + \\
& \qquad + 6B_1B_2B_3] + \\
& \quad + \frac{1}{m^3}[A_1'^3 + A_2'^3 + A_3'^3 + 3A_1'(B_2'^2 + B_3'^2) + 3A_2'(B_3'^2 + B_1'^2) + \\
& \qquad + 3A_3'(B_1'^2 + B_2'^2) + 6B_1'B_2'B_3'] + \\
& \quad + \frac{3}{M^2 m}[A_1C_1^2 + A_2C_2^2 + A_3C_3^2] + \frac{3}{Mm^2}[A_1'C_1^2 + A_2'C_2^2 + A_3'C_3^2].
\end{aligned} \tag{19}
$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (12) für A_1, B_1 usw. und durch Ausführung der Integration (6′) erhält man:

$$
\begin{aligned}
& 2 \cdot 2\pi^2 I_1 = \frac{\delta}{M} + \frac{\delta'}{m}, \\
& 2 \cdot (2\pi^2)^2 I_2 = \frac{1}{M^2}(\delta^2 + 4\gamma^2) + \\
& \quad + \frac{1}{m^2}(\delta'^2 + 4\gamma'^2) + \\
& \quad + \frac{1}{mM}(\alpha^2 + 2\beta^2), \\
& 2 \cdot (2\pi^2)^3 I_3 = \frac{1}{M^3}[\delta^3 + 12\delta\gamma^2 + 2\gamma^3] + \\
& \quad + \frac{1}{m^3}[\delta'^3 + 12\delta'\gamma'^2 + 2\gamma'^3] + \\
& \quad + \frac{1}{M^2 m}\left[\frac{3}{2}\delta(\alpha^2 + 2\beta^2) - 6\alpha\beta\gamma\right] + \\
& \quad + \frac{1}{m^2 M}\left[\frac{3}{2}\delta'(\alpha^2 + 2\beta^2) - 6\alpha\beta\gamma'\right].
\end{aligned} \tag{20}
$$

Wenn wir noch die oben besprochene Annahme $\gamma = \gamma'$ und entsprechend natürlich $\delta = \delta'$ machen, wird:

$$
\begin{aligned}
& 2\pi^2 I_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)\delta, \\
& (2\pi^2)^2 I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M^2} + \frac{1}{m^2}\right)(\delta^2 + 4\gamma^2) + \\
& \quad + \frac{1}{Mm}\frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\beta^2), \\
& (2\pi^2)^3 I_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M^3} + \frac{1}{m^3}\right)(\delta^3 + 12\delta\gamma^2 + 2\gamma^3) + \\
& + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{M^2 m} + \frac{1}{Mm^2}\right)\left[\frac{1}{2}\delta(\alpha^2 + 2\beta^2) - 2\alpha\beta\gamma\right].
\end{aligned} \tag{21}
$$

Für $M = m$ gehen daraus natürlich die in meiner früheren Arbeit angegebenen[1]) Koeffizienten hervor, wir wollen sie mit $\bar{I}$ bezeichnen.

$$
\begin{aligned}
& 2\pi^2 \bar{I}_1 = \frac{\delta}{m}, \\
& (2\pi^2)^2 \bar{I}_2 = \frac{1}{m^2}\left[\delta^2 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\beta^2 + 8\gamma^2)\right], \\
& (2\pi^2)^3 \bar{I}_3 = \frac{1}{m^3}\left[\delta^3 + \frac{3}{2}\delta(\alpha^2 + 2\beta^2 + \right. \\
& \qquad \left. + 8\gamma^2) + 2\gamma^3 - 6\alpha\beta\gamma\right].
\end{aligned} \tag{22}
$$

Die drei angegebenen Koeffizienten würden nicht genügen, um die spezifischen Wärmen im Temperaturintervall von 60° bis 80° abs. bis auf die zweite Dezimale genau zu rechnen. Man ist aber in der Lage, weitere Koeffizienten angenähert zu bestimmen. Zunächst sieht man, daß I_1 aus $\bar{I}_1$ hervorgeht, wenn man $\frac{1}{m}$ durch $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)$ ersetzt. Ferner läßt sich, wenn M von m nicht allzusehr verschieden ist, I_2 approximieren, wenn man in $\bar{I}_2$ $\frac{1}{m^2}$ durch $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{M^2} + \frac{1}{m^2}\right)$ ersetzt. Das rührt daher, daß das Glied δ^2 numerisch alle anderen Glieder stark überwiegt. Durch eine analoge Vertauschung geht auch aus $\bar{I}_3$ ein Wert hervor, der sich von I_3 nicht viel unterscheidet. Für $NaCl$ beispielsweise 4,99 : 5,16, die beiden Zahlen unterscheiden sich um 3,4 Proz., nun trägt das Glied mit I_3 aber selbst nur einen Anteil von etwa 8 Proz. zum Gesamtresultat bei, so daß der durch diese Vertauschung gemachte Fehler nicht mehr als 0,27 Proz. ausmachen würde. Diese Überlegung zeigt, daß man das direkt nur äußerst schwer bestimmbare I_4 dadurch angenähert berechnen kann, daß man in dem von mir l. c. angegebenen $\bar{I}_4$ $\frac{1}{m^4}$ durch $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{M^4} + \frac{1}{m^4}\right)$ ersetzt.

1) l. c., Gl. (18). — Es wurde dort versehentlich in I_3 das Glied $-6\alpha\beta\gamma$ weggelassen, was aber auf das Schlußresultat keinen Einfluß ausübt.

Schließlich lassen sich noch bei der numerischen Ausrechnung der Reihe aus dem Gang der Glieder weitere Summanden extrapolieren, wie z. B. für KCl und $T = 70^0$:

$$C = C_\infty [1 - 0{,}551 + 0{,}228 - 0{,}086 + 0{,}029 - \\ - (0{,}009) + (0{,}003)],$$

wobei die beiden letzten Glieder durch Extrapolation gewonnen sind.

Die Werte der Materialkonstanten, die der Rechnung zugrunde gelegt wurden, sind den Phys.-Chem. Tabellen von Landolt-Börnstein, IV. Aufl., entnommen worden. Die nachfolgende Tabelle 2 gibt eine Zusammenstellung, in welche auch gleich die im nächsten Abschnitt behandelten dreiatomigen Substanzen Pyrit und Flußspat aufgenommen wurden.

Tabelle 2.

	$NaCl$	KCl	FeS_2	CaF_2
Dichte . .	2,18	1,98	5,03	3,18
$m \cdot 10^{23}$.	3,80	5,85	5,28	3,134
$M \cdot 10^{23}$.	5,85	6,44	9,22	6,62
$a \cdot 10^8$.	2,805	3,14	2,357	2,38
$C_{11} \cdot 10^{-8}$	4680	3680	36100	16700
$C_{11} \cdot 10^{-8}$	1270	643	10550	3450
$C_{12} \cdot 10^{-8}$	1294	194	4740	4570
α	5920	8950	49100	20070
β	—34	706	5850	—1330
γ	1800	430	9060	4780
δ	13050	12960	98700	37100

Für die Zahl der Moleküle im Mol wurde der zuletzt von Millikan[1]) angegebene Wert $6{,}06 \cdot 10^{23}$ benutzt, obwohl der Perrinsche[2]) Wert $6{,}82 \cdot 10^{23}$ bessere Resultate liefern würde. Es schien mir jedoch der Millikansche Wert exakter zu sein; zudem stimmt er auch besser mit dem aus der Strahlungstheorie gefolgerten überein. $\beta = \frac{h}{k}$ wurde gleich $4{,}83 \cdot 10^{-11}$ gesetzt.

Wie A. Eucken[3]) auseinandersetzte, war es bei der Bestimmung der spezifischen Wärmen aus den elastischen Konstanten bisher ein Mangel, daß die Temperaturabhängigkeit der letzteren Größen nicht berücksichtigt wurde. Ich habe es nun versucht, diese Abhängigkeit mit in Rechnung zu ziehen, was insofern etwas gewagt ist, als direkte Beobachtungen über den Einfluß der Temperatur auf die Elastizität von Kristallen bisher noch nicht gemacht worden sind. Immerhin aber gestatten die Messungen von Cl. Schaefer[4]) wenigstens einen orientierenden Einblick in diese Abhängigkeit für verschiedene Substanzen, indem sie einen Zusammenhang zwischen Schmelztemperatur und Temperaturkoeffizient des Torsionsmoduls ergeben haben. Der Torsionsmodul ist, wie Eucken (l. c.) zeigte, für das Verhalten der spezifischen Wärmen in erster Linie maßgebend[1]). Wir werden also den Temperatureinfluß in guter Annäherung in Rechnung bringen, wenn wir annehmen, daß die I_k sich so ändern, wie die $k$ten Potenzen von μ. Wenn wir also unter $\Delta\mu$ die Änderung in Proz. pro 100° C verstehen und mit I_k den $k$ten Koeffizienten bezeichnen, der aus den in Tabelle 2 angegebenen Elastizitätskoeffizienten gerechnet wurde, so haben wir für das Temperaturintervall um — 200° C setzen:

$$I_{k\,\mathrm{corr.}} = \left(1 + \frac{2\,\Delta\mu}{100}\right)^k I_k. \qquad (23)$$

Die Größe $\Delta\mu$ läßt sich nun aus der von Cl. Schaefer angegebenen Kurve extrapolieren. In Fig. 2, die der zitierten Abhandlung entnommen ist, sind die Schmelztemperaturen als Abszissen und die $\Delta\mu$ als Ordinaten aufgetragen. Man sieht daraus, daß $NaCl$ und KCl, deren Schmelztemperatur bei 800° C liegt, mit $\Delta\mu = 15$ Proz. gut in die Kurve hineinpassen würden. Es wurden also gemäß (23) die aus Tabelle 2 gerechneten I_k noch mit $1{,}3^k$ multipliziert. Es sei noch erwähnt, daß die spezielle Festsetzung des $\Delta\mu$ auf 15 Proz., das ja nur ein wahrscheinlicher, aber keineswegs ein sicherer Wert ist, für das Endresultat keine sehr wesentliche Rolle spielt, denn wenn wir $\Delta\mu$ irgendwie zwischen 12 Proz. und 18 Proz. variieren, ändern sich die spezifischen Wärmen um weniger als 2 Proz. gegenüber den unten angegebenen Werten. — Der Einfluß der Tem-

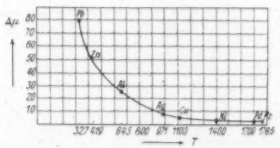


Fig. 2.

1) R. A. Millikan, diese Zeitschr. 14, 796, 1913.
2) Jean Perrin, Die Atome. Deutsch v. A. Lottermoser. Dresden 1914.
3) A. Eucken, Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 571, 1913.
4) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 5, 220, 1901.

1) Das läßt sich auch auf folgende Weise leicht einsehen: Beim Übergang zum isotropen Körper geht C_{11} über in $\lambda + 2\mu$, C_{12} in λ und C_{44} in μ, daher nach Gleichung (9) und (10):

$$\delta = a\,(C_{11} + C_{44} - C_{12}) = 3\,\mu\,a_s,$$
$$\alpha = a\,(C_{11} - C_{44} - C_{12}) = \mu a\,.$$

Nun liefern aber, wie schon früher erwähnt, für die Berechnung der I_k die $k$ten Potenzen von δ den größten Anteil, in zweiter Linie kommen dann die Produkte von α und δ; die verhalten sich aber ebenfalls wie die entsprechenden Potenzen von μ, welcher Parameter seinerseits wieder dem Torsionsmodul proportional ist.

peratur auf das a wurde unberücksichtigt gelassen, da der lineare Ausdehnungskoeffizient klein ist gegenüber $\Delta\mu$.

Im folgenden die Werte der in der besprochenen Weise aus (21) und (23) berechneten I_k:

	NaCl	*KCl*
$I_1 \cdot 10^{-25}$	1,86	1,39
$I_2 \cdot 10^{-50}$	4,24	2,43
$I_3 \cdot 10^{-75}$	11,0	4,80
$I_4 \cdot 10^{-100}$	33,2	10,0

Durch Einsetzen in (5) ergeben sich daraus die spezifischen Wärmen bei konstantem Volum, die sich in der bekannten Weise[1]) auf spezifische Wärmen bei konstantem Druck umrechnen lassen. Die Werte für diese letzteren Größen sind schließlich in den Tabellen 3 und 4 zusammengestellt.

Tabelle 3. *NaCl.*

T	C_p			Abweichung in Proz.
	ber. N.-L.	beob. N.-L.	ber. B.-K.	
83,4	3,61	3,75	3,71	−1
81,4	3,47	3,54	3,67	+3,6
69	2,94	3,13	3,09	−1,3
67,5	2,87	3,06	3,02	−1,3

Tabelle 4. *KCl.*

T	C_p			Abweichung in Proz.
	ber. N.-L.	beob. N.-L.	ber. B.-K.	
86	4,40	4,36	4,29	−1,7
76,6	4,10	4,11	3,95	−4,0
70,0	3,85	3,79	3,66	−3,6
62,9	3,57	3,36	3,30	−1,9
57,6	3,25	3,06	2,99	−2,3

Die mittlere Abweichung beträgt ca. 2,3 Proz. gegenüber 3,7 Proz. bei den nach der Nernst-Lindemannschen Formel[2]) gerechneten Werten.

§ 3. Erweiterung der Theorie auf drei- und mehratomige Kristalle.

Es soll im folgenden gezeigt werden, wie mit einigen Vernachlässigungen die Theorie auf drei- und mehratomige Substanzen ausgedehnt werden kann.

Um mit demselben Grad von Genauigkeit weiterzurechnen wie bisher, hätte man sich zunächst eine Vorstellung von der Lagerung der Atome in einem Kristall, dessen Molekül drei Atome enthält, zu machen und hernach die dem Gleichungssystem (8) und (8′) entsprechenden Ansätze zu machen. Wiewohl nun die Untersuchungen von W. L. Bragg[1]) über die Details der Atomanordnung in Substanzen wie CaF_2 einige Aufklärung liefern, will ich doch eine vollständige Durchrechnung, die an Stelle von (8) und (8′) drei Gleichungstripel und an Stelle von (11) eine neunreihige Determinante ergeben würde, unterlassen, und bloß zeigen, wie man die Sache angenähert behandeln kann, wobei sich auch wieder eine gute Übereinstimmung mit der Beobachtung ergeben wird.

Die erste, gröbste Annäherung, die man machen kann, wäre die, daß man den Kristall durch ein kubisches Gitter approximiert, dessen Gitterpunkte alle mit gleichen Massen, den Mittelwerten aus den Atomgewichten der Komponenten besetzt sind. Man hätte dann einfach zur Bestimmung der spezifischen Wärme die Koeffizienten $\overline{I_k}$ aus Formel (22) zu nehmen. Nun haben wir früher gesehen, daß für den zweiatomigen Körper die Koeffizienten in genügender Annäherung aus den $\overline{I_k}$ hervorgehen, wenn man darin

$$\frac{1}{m^k} \quad \text{durch} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M^k}+\frac{1}{m^k}\right)$$

ersetzt. Das legt nun den Gedanken nahe, die Koeffizienten für den dreiatomigen Körper in zweiter Annäherung dadurch zu bestimmen, daß man in $\overline{I_k}$

$$\frac{1}{m^k} \quad \text{durch} \quad \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m_1{}^k}+\frac{1}{m_2{}^k}+\frac{1}{m_3{}^k}\right)$$

ersetzt. Dieser zunächst rein formale Analogieschluß läßt sich nachträglich auch durch Überlegung rechtfertigen. Denn wie auch immer die Lagerung der Atome im Kristall sein mag, jedenfalls werden die Diagonalglieder der (11) entsprechenden neunreihigen Determinante die Form haben:

$$\begin{gathered}(A_1^{(1)} - 2\pi^2 m_1 \nu^2),\quad (A_2^{(1)} - 2\pi^2 m_1 \nu^2),\\ (A_3^{(1)} - 2\pi^2 m_1 \nu^2),\quad (A_1^{(2)} - 2\pi^2 m_2 \nu^2),\\ (A_2^{(2)} - 2\pi^2 m_2 \nu^2),\quad (A_3^{(2)} - 2\pi^2 m_2 \nu^2),\\ (A_1^{(3)} - 2\pi^2 m_3 \nu^2),\quad (A_2^{(3)} - 2\pi^2 m_3 \nu^2),\\ (A_3^{(3)} - 2\pi^2 m_3 \nu^2),\end{gathered}$$

während alle anderen Glieder von ν^2 frei sind. Die Summe der ersten Potenzen der neun Lösungen für ν^2 wird daher die Form haben:

$$\begin{aligned}2\pi^2 s_1 = &\frac{1}{m_1}(A_1^{(1)} + A_2^{(1)} + A_3^{(1)}) +\\ &+ \frac{1}{m_2}(A_1^{(2)} + A_2^{(2)} + A_3^{(2)}) +\\ &+ \frac{1}{m_3}(A_1^{(3)} + A_2^{(3)} + A_3^{(3)}),\end{aligned}$$

1) Nernst und Lindemann, Ann. d. Phys. **36**, 426, 1911.

2) Nernst und Lindemann, Berl. Ber. 1911, S. 494.

1) W. L. Bragg, Proc. Roy. Soc. London **89**, 248, 1913.

oder, wenn wir die zu der in § 1 erörterten Annahme $\gamma = \gamma'$ analoge Festsetzung

$$A_i^{(1)} = A_i^{(2)} = A_i^{(3)}$$

treffen:

$$2\pi^2 s_1 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)(A_1 + A_2 + A_3).$$

In den höheren Potenzsummen s_k müssen dann jedenfalls Glieder mit

$$\frac{1}{m_1^k} + \frac{1}{m_2^k} + \frac{1}{m_3^k}$$

als Faktor vorkommen neben anderen von der Gestalt

$$\frac{1}{m_1^r m_2^s m_3^t} \qquad (r+s+t=k),$$

deren Vertauschung mit dem oben genannten Glied, wie wir beim zweiatomigen Kristall sahen, keinen großen Fehler verursacht.

Unsere Berechnung der I_k für den mehratomigen Körper aus den I_k des einatomigen wird also besonders für I_1 als gute Annäherung gelten können und speziell für jene Temperaturen sehr brauchbar sein, bei denen das Glied I_1 den weitaus größten Beitrag zur Reihe (5) liefert.

Zusammenfassend wollen wir also sagen: Die spezifische Wärme eines regulären Kristalls, dessen Molekül n Atome enthält, läßt sich in zweiter Annäherung mit Hilfe der Reihe (5) berechnen, worin für die ersten Koeffizienten I_k zu setzen ist:

$$\left.\begin{aligned}
2\pi^2 I_1 &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{m_l}\cdot\delta,\\
(2\pi^2)^2 I_2 &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{m_l^2}\cdot\left[\delta^2 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\beta^2 + 8\gamma^2)\right],\\
(2\pi^2)^3 I_3 &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{m_l^3}\cdot\left[\delta^3 + \frac{3}{2}\delta(\alpha^2 + 2\beta^2 + 8\gamma^2) + 2\gamma^3 - 6\alpha\beta\gamma\right],\\
(2\pi^2)^4 I_4 &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{m_l^4}\cdot\left[\delta^4 + 3\delta^2(\alpha^2 + 2\beta^2 + 8\gamma^2) + 8\delta\gamma^3 + \frac{3}{8}\alpha^4 + \frac{9}{4}\beta^4 + 31\gamma^4 + 3\alpha^2\beta^2 + 11\alpha^2\gamma^2 + 35\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma^2\right].
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Die Größen α, β, γ, δ sind gegeben durch Gleichung (9) und (16); die darin auftretende Größe a ist aus der Zahl der im Mol vorhandenen Atome ohne Rücksicht auf ihre Verschiedenheit zu rechnen.

Die Formeln (24) wurden auf CaF_2 und FeS_2 angewendet. Die Werte der benutzten Konstanten sind in Tabelle 2 angegeben. Für Flußspat, dessen Schmelztemperatur 1400° C ist, wurde nach Fig. 2 $\Delta\mu = 3$ Proz. gesetzt, für Pyrit, dessen Schmelzpunkt höher liegt, $\Delta\mu = 2$ Proz.

Aus (23) und (24) ergibt sich dann:

	CaF_2	FeS_2
$I_1 \cdot 10^{-25}$	5,33	8,26
$I_2 \cdot 10^{-50}$	34,8	82,4
$I_3 \cdot 10^{-75}$	276	934
$I_4 \cdot 10^{-100}$	2390	11560

Die Schlußresultate sind in Tabelle 5 zusammengestellt:

Tabelle 5.

T	C_v pro Mol CaF_2		C_v pro Mol FeS_2	
	beob.	ber.	beob.	ber.
328	16,04 - 16,29	16,24	—	—
301,2	—	—	14.54	15,0
300	—	15,95	—	—
236,5	14,6	14,95	—	—
234,9	—	—	12,98	13,5
200	—	13,98	—	12,3
180	—	—	—	11.3
150	—	11,75	—	9,47
120	—	9,56	—	

Leider gestattet die Konvergenz der Reihe (5), die für tiefere Temperaturen immer schlechter wird, nicht mehr die Berechnung im Temperaturintervall unter 86° abs., für welches die ausführlichen Messungen von A. Eucken[1]) vorliegen. Man kann sich aber durch graphische Darstellung (Fig. 3) überzeugen, daß sich die

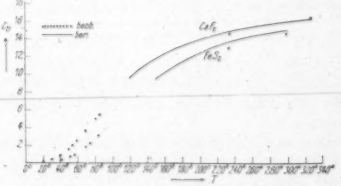


Fig. 3.

beobachteten und gerechneten Kurven sehr gut aneinander schließen. Dieses Resultat ist insofern beachtenswert, als, wie schon eingangs er-

1) A. Eucken, Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 548, 1913.

wähnt, die Kurven nicht erst adjustiert werden mußten, sondern ganz eindeutig aus den Elastizitätskonstanten und den molekularen Größen hervorgehen.

Zusammenfassung.

Es wird die Born- und Kármánsche Theorie der Raumgitterschwingungen auf Gitter mit alternierend verschiedenen Massenpunkten ausgedehnt, wodurch sich die Möglichkeit ergibt, die spezifischen Wärmen mehratomiger regulärer Kristalle für tiefe Temperaturen aus den Elastizitätskonstanten zu berechnen. Die Rechnung wird durchgeführt für $NaCl$, KCl, CaF_2 und FeS_2; die Resultate stehen bei einer mittleren Abweichung von 2,3 und einer maximalen von 4 Proz. in guter Übereinstimmung mit den beobachteten Werten.

Institut für theoretische Physik der Wiener Universität, 16. Dezember 1913.

(Eingegangen 20. Dezember 1913.)

Über die Methode der Eigenschwingungen in der Theorie der spezifischen Wärmen.

Von M. Born.

1. Die Theorie der spezifischen Wärme der festen Körper hat zu der Auffassung geführt, daß die Plancksche Formel für die mittlere Energie eines Resonators nicht auf die einzelnen Moleküle, sondern auf die Eigenschwingungen des ganzen Systems anzuwenden ist. Diese Vorstellung ist zweifellos mit Schwierigkeiten verknüpft, so lange keine andere Ableitung der Planckschen Formel vorliegt als die mit Hilfe von endlichen Energiequanten; denn wenn man sich auch vorstellen kann, daß der Mechanismus der Schwingungen eines einzelnen physischen Elementargebildes, z. B. eines Elektrons im Atomverbande, ein quantenhaftes Empfangen oder Entsenden von Energie bewirke, so ist die Beschränkung auf ganze Vielfache des Energiequantums bei der Energie eines abstrakten Freiheitsgrades (einer durch den ganzen Körper laufenden Welle) doch schwer verständlich. Man wird vorläufig darauf verzichten müssen, diese Dinge im Sinne der alten Naturauffassung zu „verstehen", und es als gegebene Tatsache ansehen, daß den monochromatischen Schwingungen als solchen die Eigenschaft quantenhafter Energie zukommt. In der Tat hat dieser Ansatz überall zu brauchbaren Gesetzen geführt, zuerst in der Theorie der spezifischen Wärme der festen Körper[1]), dann bei den Kapillarerscheinungen[2]) und den thermischen Eigenschaften der Gase[3]). Neuerdings ist die Methode von großer Wichtigkeit geworden bei der Berechnung des Einflusses der Temperatur auf die Beugung der Röntgenstrahlen[4]).

2. Unter diesen Anwendungen der Methode der Eigenschwingungen erscheint mir die auf die Gase am merkwürdigsten. Sie beruht auf folgendem Gedanken: Um die Eigenschwingungen eines festen Körpers von n Molekülen zu berechnen, hat Debye als Annäherungsverfahren den Körper als Kontinuum aufgefaßt mit der Annahme, daß die ersten $3n$ der unendlich vielen Eigenschwingungen des Kontinuums angenähert mit den wirklichen $3n$ Eigenschwingungen des Molekülgitters übereinstimmen werden. Dies Verfahren hat man nun auf die Gase übertragen; man berechnet die Schwingungen eines Gasvolumens aus der Schwingungsgleichung, die aus der gewöhnlichen Hydrodynamik hervorgeht. Während nun aber bei den festen Körpern evident ist, daß die Schwingungen eines äquivalenten Kontinuums tatsächlich die des Punktgitters in gewissen Grade approximieren, ist dafür bei einem Gase gar kein Grund vorhanden. Denn in der gewöhnlichen Auffassung der Gastheorie besteht die Wärmebewegung der Gasmoleküle in Zickzackwegen, die auch nicht angenähert als Schwingungen um Gleichgewichtslagen aufgefaßt werden können. Wenn trotzdem die Methode für hohe und für tiefe Temperaturen zu ganz vernünftigen Formeln führt, so kann ich darin keine Bestätigung der Grundlagen sehen, sondern nur eine Folge des Umstandes, daß bei extremen Temperaturen die Gesetze von dem wahren Mechanismus ziemlich unabhängig sind. Besser liegt es schon bei den Flüssigkeiten, weil man annehmen kann, daß bei diesen trotz ihrer Beweglichkeit die Wärmebewegung im wesentlichen auf kleinen Schwingungen beruht; darum hat auch die Anwendung der Methode zur Ableitung des Gesetzes von Eötvös Erfolg gehabt. Jedenfalls aber wird man festhalten müssen, daß das Debyesche Verfahren, die wirkliche Molekularbewegung durch Schwingungen eines Kontinuums zu ersetzen, in jedem Falle erst auf seine Berechtigung geprüft werden muß. So hat Debye selbst in seiner neuen Arbeit über den Einfluß der Tem-

1) Debye, Ann. d. Phys. **39**, 789, 1912; Born und v. Kármán, diese Zeitschr. **13**, 297, 1912; **14**, 15, 1913; **14**, 65, 1913.

2) Born und Courant, diese Zeitschr. **14**, 731, 1913.

3) H. Tetrode, diese Zeitschr. **14**, 212, 1913; O. Sackur, Jahresber. d. schles. Ges. f. vaterl. Kultur, Febr. 1913; A. Sommerfeld und Lenz, diese Zeitschr. **14**, 262, 1913; W. H. Keesom, diese Zeitschr. **14**, 665, 1913.

4) P. Debye, Ann. d. Phys. (4), **43**, 1, 1914.

peratur auf die Beugung der Röntgenstrahlen[1]) selbst für feste Körper ein Eingehen auf den wirklichen Molekularvorgang nicht vermeiden können und die von v. Karman und mir ausgebildete Methode herangezogen[2]).

3. Ich habe nun gesucht, ein Beispiel zu finden, das in möglichst krasser Weise zeigt, wie eine unkritische Anwendung der Debyeschen Methode zu falschen Resultaten führt. Es handelt sich also darum, ein thermodynamisches System anzugeben, das die folgende Eigenschaft hat: Man fasse das System nach Debye als Kontinuum auf und berechne seine ersten $3n$ Eigenschwingungen, wobei n die Anzahl der vorhandenen Moleküle bedeutet; darauf ordne man jeder Eigenschwingung die Energie (bzw. freie Energie) zu, die ein Planckscher Resonator derselben Frequenz haben würde, und summiere diese Beiträge; die entstehende Formel für die Energie (bzw. freie Energie) des Systems soll nun zu Folgerungen führen, die bekannten thermodynamischen Sätzen widersprechen.

4. Es ist leicht, ein solches Beispiel zu konstruieren. Man nehme den Fall eines aus zwei Phasen bestehenden Systems (etwa ein Kristall in seiner Schmelze). Dieser Fall ist auch von anderer Seite schon quantentheoretisch behandelt worden; dann ist man aber so vorgegangen, daß die Energie (bzw. freie Energie) jeder Phase für sich berechnet wurden und nachträglich durch Addition die Energie (bzw. freie Energie) für das Gesamtsystem gebildet wurde. Dieses Verfahren liefert allerdings vernünftige Gesetze für das Gleichgewicht und die Umwandlung der Phasen, aber es widerspricht vollständig dem Sinne der Methode der Eigenschwingungen. Denn das Zwei-Phasen-System als Ganzes ist im Sinne der Mechanik ein einziges Massensystem von vielen gekoppelten Massenpunkten und kann nicht einfach an der Grenze der Phasen in zwei unabhängige Teile zerschnitten werden; die Moleküle der Grenzschicht werden von den Vorgängen in beiden Phasen beeinflußt, und jede Welle, die in der einen Phase entsteht, setzt sich ohne Änderung ihrer Frequenz in die zweite Phase fort — mag die Grenzschicht beschaffen sein wie sie will. Man muß also jedenfalls bei der Berechnung der Eigenschwingungen beide Phasen als ein mechanisches System ansehen. Mit der Debyeschen Annäherung wird man dabei jede der homogenen Phasen als Kontinuum behandeln und an der Grenzfläche die Gesetze der gewöhnlichen Mechanik der Kontinua (Hydrodynamik bzw. Elastizitätstheorie) anwenden. Dabei wird es nicht nötig sein, die Vorgänge in der Grenzschicht besonders zu behandeln; denn solange die Grenzfläche nicht außerordentlich starke Krümmungen aufweist, ist die in ihr enthaltene Energie nach der gewöhnlichen Kapillaritätstheorie neben der Gesamtenergie des Systems zu vernachlässigen.

5. Ich behaupte nun zweierlei:

I. Die notwendige Voraussetzung für das Vorhandensein eines nur von der Temperatur abhängigen Gleichgewichtsdruckes des Zweiphasensystems (z. B. Schmelzdruckkurve $p(T)$) ist, daß die Energie (bzw. freie Energie) jeder Phase proportional ihrer Masse und die gesamte Energie (bzw. freie Energie) gleich der Summe der entsprechenden Größen der beiden Phasen ist.

II. Behandelt man das System nach dem eben skizzierten Verfahren der Eigenschwingungen, so läßt sich die gesamte Energie (bzw. freie Energie) nicht in dieser Weise in zwei Teile, entsprechend den beiden Phasen, spalten.

Da es nun wohl nicht bezweifelt werden kann, daß im Gleichgewicht zweier homogener Phasen der Druck nur von der Temperatur abhängt, so folgt, daß das Debyesche Verfahren auf dieses System nicht angewandt werden kann.

6. Ich habe jetzt noch die beiden Behauptungen I und II zu beweisen. Die Aussage I ergibt sich durch folgende einfache Überlegung. Die Gleichgewichtsbedingung eines thermodynamischen Systems erhält man mit Hilfe der freien Energie durch die Forderung, daß die Variation derselben verschwinden muß bei allen virtuellen Änderungen der Massen und Dichten der Phasen, die die gesamte Masse und das gesamte Volumen ungeändert lassen. Wenn nun die Additivität gilt, so hat man

$$\delta(M_1 H_1 + M_2 H_2) = 0,$$
$$\delta(M_1 + M_2) = 0;$$
$$\delta(M_1 v_1 + M_2 v_2) = 0,$$

und daraus sind δM_1, δM_2 zu eliminieren. Man erhält so ohne weiteres die Bedingungen, daß

$$\frac{\partial H_1}{\partial v_1} = \frac{\partial H_2}{\partial v_2} = -p$$

und

$$H_1 + p v_1 = H_2 + p v_2$$

sein muß; drückt man aus den beiden ersten Gleichungen v_1, v_2 durch p aus, so stellt die

1) l. c., S. 185.

2) Herr E. Schrödinger hat diese Erscheinung auf demselben Wege wie Debye angegriffen und scheint sogar durch Berücksichtigung der zwischen Nachbarmolekülen bestehenden Phasenbeziehung der elastischen Schwingung zu feineren Resultaten vorzudringen. Allerdings liegt erst eine Mitteilung über den eindimensionalen Fall vor (diese Zeitschr. **15**, 79, 1914).

letzte Gleichung, welche die Gleichheit der thermodynamischen Potentiale der Masseneinheit beider Phasen fordert, eine Beziehung zwischen Temperatur T und Druck p allein dar, die Umwandlungskurve.

Man sieht hieraus ohne weiteres, daß das Vorhandensein einer von den Massen M_1, M_2 unabhängigen Gleichung zwischen p und T durchaus davon abhängt, daß die freie Energie eine lineare homogene Funktion der Massen ist. Ist das nicht der Fall, sondern allgemein

$$H = H(v_1, v_2, M_1, M_2, T),$$

so liefert das Variationsproblem

$$\delta H = 0$$

mit den Nebenbedingungen

$$\delta(M_1 + M_2) = 0,$$
$$\delta(M_1 v_1 + M_2 v_2) = 0$$

keine Gleichung zwischen p und T allein, sondern eine Gleichung der Form

$$p = p(M_1, M_2, T).$$

Daraus würde z. B. folgen, daß der Gleichgewichtsdruck sich erhöhen oder erniedrigen läßt, indem man die Masse einer der Phasen verkleinert; letzteres kann aber durch Abstellen eines Sperrhahns offenbar ohne Arbeitsleistung geschehen. Durch solche Widersinnigkeiten läßt sich der Ansatz widerlegen, ohne daß man erst auf die Erfahrung zu rekurrieren brauchte.

7. Der Beweis der Behauptung II braucht tiefere mathematische Hilfsmittel. Ich will die in Betracht kommenden Sätze nur nennen, ohne zunächst auf die Beweise einzugehen.

Wir betrachten zuerst die Phase 1 für sich; diese habe n_1 Moleküle. Dann berechnen wir ihre ersten $3n_1$ Eigenschwingungen, indem wir sie als Kontinuum ansehen (mit geeigneten Randbedingungen). Diese seien

$$\nu_1^{(1)}, \nu_2^{(1)}, \ldots \nu_{3n_1}^{(1)}.$$

Ebenso berechnen wir die ersten $3n_2$ Eigenschwingungen der zweiten Phase für sich, wobei n_2 die Anzahl der Moleküle dieser Phase bedeute; diese seien

$$\nu_1^{(2)}, \nu_2^{(2)}, \ldots \nu_{3n_2}^{(2)}.$$

Ist $f(\nu)$ nun die Energie (bzw. freie Energie) eines Planckschen Resonators der Frequenz ν, so wird die gesamte Energie (bzw. freie Energie) der ersten Phase

$$F_1 = \sum_{\rho=1}^{3n_1} f(\nu_\rho^{(1)}),$$

und die der zweiten Phase

$$F_2 = \sum_{\rho=1}^{3n_2} f(\nu_\rho^{(2)}).$$

Denken wir uns nun die beiden Phasen zu einem System von $n = n_1 + n_2$ Molekülen vereinigt, so wird es eine Reihe von $3n$ Eigenschwingungen

$$\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{3n}$$

haben. Im allgemeinen wird aber unter diesen $3n$ Zahlen weder eine einzige der $3n_1$ Frequenzen der Phase 1, noch der $3n_2$ Frequenzen der Phase 2 vorkommen; das Spektrum des vereinigten Systems hat zwar ebenso viele Schwingungszahlen wie die beiden Phasen zusammen, aber es ist völlig verschieden von den Spektren der Phasen. Folglich wird auch die Energie (bzw. freie Energie) des ganzen Systems

$$F = \sum_{\rho=1}^{3n} f(\nu_\rho)$$

verschieden von der Summe $F_1 + F_2$ ausfallen.

8. Zur Verdeutlichung dieser Überlegungen wollen wir das Spektrum nach der Debyeschen Methode wirklich in einem einfachen Falle ausrechnen. Um die Rechnung zu vereinfachen, wollen wir beide Phasen als Flüssigkeiten ansetzen; die elastischen Eigenschaften werden dann für jede Phase durch Angabe einer einzigen Zahl, etwa der Schallgeschwindigkeit, beschrieben. Ferner denken wir uns der Einfachheit halber das ganze System eingeschlossen in einen Würfel von der Kantenlänge l, der auf der horizontalen xy-Ebene ruht. Die beiden Phasen werden dann in einer Ebene $z = \text{konst.}$ aneinander grenzen; die Höhe der unteren Phase (1) sei h_1, die der oberen Phase (2) sei h_2, so daß $h_1 + h_2 = l$ ist. Im übrigen sehen wir von der Schwere ab (Fig. 1).

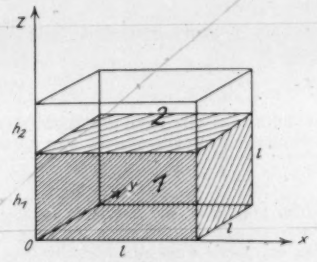


Fig. 1.

Für einen Schwingungszustand der Frequenz ν werden dann die Geschwindigkeitspotentiale Φ_1 und Φ_2 in den beiden Teilräumen bzw. den Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Phi_1 + \frac{4\pi^2\nu^2}{c_1^2}\Phi_1 &= 0, \\ \Delta\Phi_2 + \frac{4\pi^2\nu_2}{c_2^2}\Phi_2 &= 0 \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

genügen, in denen c_1 und c_2 die Schallgeschwindigkeiten in den beiden Phasen bedeuten. Wir setzen voraus, daß

$$c_1 > c_2 \tag{2}$$

ist.

An den Wänden des Gefäßes muß die Normalkomponente der Geschwindigkeit verschwinden:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ an den Wänden.} \tag{3}$$

An der Grenze $z = h_1$ werden wir neben der Stetigkeit des Geschwindigkeitspotentials selbst die Stetigkeit der Normalkomponente der Geschwindigkeit zu fordern haben:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_1 &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_2 \end{aligned}\right\} \text{ für } z = h_1. \tag{4}$$

Den Forderungen (1) und (3) wird offenbar durch den Ansatz genügt:

$$\Phi_1 = a_1 \cos\frac{\pi m}{l} x \cos\frac{\pi n}{l} y \cos\lambda_1 z,$$

$$\Phi_2 = a_2 \cos\frac{\pi m}{l} x \cos\frac{\pi n}{l} y \cos\lambda_2 (l - z),$$

wobei m und n ganze Zahlen bedeuten und λ_1 und λ_2 als positive Wurzeln aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \frac{4\pi^2\nu^2}{c_1^2} - \frac{\pi^2}{l^2}(m^2 + n^2), \\ \lambda_2^2 &= \frac{4\pi^2\nu^2}{c_2^2} - \frac{\pi^2}{l^2}(m^2 + n^2) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

bestimmt werden.

Die Bedingungen (4) führen dann zu den Gleichungen

$$a_1 \cos\lambda_1 h_1 = a_2 \cos\lambda_2 h_2,$$
$$a_1 \lambda_1 \sin\lambda_1 h_1 = -a_2 \lambda_2 \sin\lambda_2 h_2,$$

welche dann und nur dann ein nicht identisch verschwindendes Lösungssystem a_1, a_2 haben, wenn

$$\lambda_1 \operatorname{tg}\lambda_1 h_1 + \lambda_2 \operatorname{tg}\lambda_2 h_2 = 0 \tag{6}$$

ist. Setzt man hier die Werte (5) ein, so erhält man eine transzendente Gleichung für ν, die das elastische Spektrum des Systems darstellt; mit Hilfe der Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2\pi}{c_1}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{c_2}, \\ \beta &= \frac{\pi}{l}\sqrt{m^2 + n^2} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und

$$\left.\begin{aligned} F_1(\nu) &= \sqrt{\alpha_1^2\nu^2 - \beta^2} \cdot \operatorname{tg}\left(h_1\sqrt{\alpha_1^2\nu^2 - \beta^2}\right), \\ F_2(\nu) &= -\sqrt{\alpha_2^2\nu^2 - \beta^2} \cdot \operatorname{tg}\left(h_2\sqrt{\alpha_2^2\nu^2 - \beta^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

schreibt sich diese Gleichung:

$$F_1(\nu) = F_2(\nu). \tag{9}$$

Es handelt sich nun darum, die Anzahl der Spektrallinien unterhalb ν_0 zu bestimmen. Dazu denken wir uns zunächst die ganzen Zahlen m und n festgehalten und berechnen die Anzahl der Schnittpunkte der Kurven $F_1(\nu)$ und $F_2(\nu)$ unterhalb ν_0.

Diese beiden Kurven bestehen nun aus zwei Teilen, die sich verschieden verhalten. Betrachten wir z. B. $F_1(\nu)$, so ist die rechts vorkommende Quadratwurzel reell, solange $\nu > \frac{\beta}{\alpha_1}$; in dem Intervalle $\frac{\beta}{\alpha_1} < \nu < \nu_0$ hat die Funktion $F_1(\nu)$ also den Charakter der Funktion $x \operatorname{tg} x$ im Intervalle $0 < x < x_0$ und besitzt so viele vertikale Asymptoten, als die größte, in

$$Z_1 = \frac{h_1\sqrt{\alpha_1^2\nu_0^2 - \beta^2}}{\pi}$$

enthaltene ganze Zahl beträgt. Im Intervall $0 < \nu < \frac{\beta}{\alpha_1}$ aber ist die Quadratwurzel rein imaginär; trotzdem ist die Funktion $F_1(\nu)$ reell, weil

$$\operatorname{tg} i x = -i \operatorname{Tg} x,$$

also

$$i x \operatorname{tg} i x = x \operatorname{Tg} x$$

ist. Dort verhält sich also die Funktion $F_1(\nu)$ wie der hyperbolische Tangens im Intervalle $0 < x < \frac{\beta}{\alpha_1}$; sie verläuft daher oberhalb der ν-Achse. Das Bild der Funktion ist in Fig. 2 skizziert.

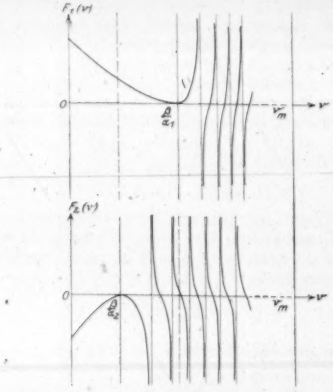


Fig. 2.

Ganz entsprechend zerfällt die Funktion $F_2(\nu)$ in zwei Teile, von denen der linke $\left(\text{für } 0<\nu<\frac{\beta}{\alpha_2}\right)$ ganz unterhalb der ν-Achse verläuft, der rechte $\left(\text{für } \frac{\beta}{\alpha_2}<\nu<\nu_0\right)$ aber so viele vertikale Asymptoten hat, als die größte in

$$Z_2=\frac{h_2\sqrt{\alpha_2^2\nu_0^2-\beta^2}}{\pi}$$

enthaltene ganze Zahl beträgt.

Bringt man nun beide Kurven zum Schnitt, so sieht man folgendes: Da nach (2) $c_1>c_2$ angenommen war, so ist nach (7) $\alpha_1<\alpha_2$, also $\frac{\beta}{\alpha_1}>\frac{\beta}{\alpha_2}$. Folglich können sich die beiden Kurven von $\nu=0$ bis $\nu=\frac{\beta}{\alpha_2}$ überhaupt nicht schneiden. In dem Intervalle von $\nu=\frac{\beta}{\alpha_2}$ bis $\nu=\frac{\beta}{\alpha_1}$ verläuft $F_1(\nu)$ glatt oberhalb der ν-Achse, während $F_2(\nu)$ so oft von $-\infty$ bis $+\infty$ geht, und daher so oft von $F_1(\nu)$ geschnitten wird, als $F_2(\nu)$ Asymptoten hat. Schließlich im Intervall von $\nu=\frac{\beta}{\alpha_1}$ bis $\nu=\nu_0$ haben beide Kurven vertikale Asymptoten; fällt zwischen zwei Asymptoten von F_2 keine Asymptote von F_1 so muß genau ein Schnittpunkt dazwischen liegen; fällt aber zwischen zwei Asymptoten von F_2 eine Asymptote von F_1 so gibt es dazwischen zwei Schnittpunkte (Fig. 3), usw.

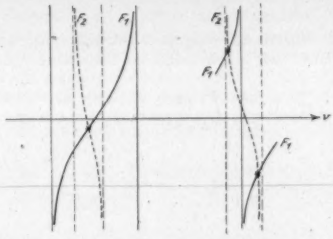


Fig. 3.

Die Gesamtzahl aller Schnittpunkte ist also gleich der Summe der Anzahl der unter ν_0 liegenden Asymptoten beider Kurven, d. h. gleich der Summe der größten, in

$$Z_1=\frac{h_1}{\pi}\sqrt{\alpha_1^2\nu_0^2-\beta^2},$$

bzw. in

$$Z_2=\frac{h_2}{\pi}\sqrt{\alpha_2^2\nu_0^2-\beta^2}$$

enthaltenen ganzen Zahlen.

Um hieraus die Anzahl aller Schwingungen unter ν_0 zu erhalten, ist die Summe noch über alle ganzen Zahlen m, n zu summieren; dabei sind natürlich m, n auf solche Werte zu beschränken, für welche die Quadratwurzeln reell sind, d. h.

$$\text{in } Z_1 \text{ derart, daß } \beta\leqq\alpha_1\nu_0,$$
$$\text{in } Z_2 \text{ derart, daß } \beta\leqq\alpha_2\nu_0$$

bleibt. Es ist also Z_1 über alle, im positiven Quadranten gelegenen Gitterpunkte des Kreises

$$m^2+n^2=R_1^2,\quad R_1=\frac{\alpha_1\nu_0 l}{\pi}$$

und Z_2 über alle im positiven Quadranten gelegenen Gitterpunkte des Kreises

$$m^2+n^2=R_2^2,\quad R_2=\frac{\alpha_2\nu_0 l}{\pi}$$

zu summieren.

Ersetzen wir die Summationen durch Integrationen über die Kreisflächen, indem wir

$$\left.\begin{aligned} m&=r\cos\varphi\\ n&=r\sin\varphi\end{aligned}\right\}\quad \beta=\frac{\pi}{l}r$$

schreiben, so erhalten wir

$$Z_1=\frac{\pi}{2}\int_0^{R_1}\frac{h_1}{\pi}\sqrt{\alpha_1^2\nu_0^2-\frac{\pi^2}{l^2}r^2}\,r\,dr,$$

$$Z_2=\frac{\pi}{2}\int_0^{R_2}\frac{h_2}{\pi}\sqrt{\alpha_2^2\nu_0^2-\frac{\pi^2}{l^2}r^2}\,r\,dr;$$

eine leichte Rechnung führt dann zu den Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} Z_1&=\frac{4}{3}\pi h_1 l^2\frac{\nu_0^3}{c_1^3},\\ Z_2&=\frac{4}{3}\pi h_2 l^2\frac{\nu_0^3}{c_2^3}.\end{aligned}\right\}\qquad (10)$$

Führen wir schließlich die Volumina der beiden Phasen ein:

$$V_1=h_1 l^2,\quad V_2=h_2 l^2,\qquad (11)$$

so erhalten wir für die Anzahl aller Eigenschwingungen unter ν:

$$Z=\frac{4}{3}\pi\nu^3\left(\frac{V_1}{c_1^3}+\frac{V_2}{c_2^3}\right).\qquad (12)$$

Daraus erhält man durch Differentiation nach ν die Dichte der Eigenschwingungen im Intervall $d\nu$:

$$\mathfrak{N}(\nu)=4\pi\nu^2\left(\frac{V_1}{c_1^3}+\frac{V_2}{c_2^3}\right).\qquad (13)$$

9. Denken wir uns nun ebenso die Dichte der Eigenschwingungen für die einzelnen Phasen berechnet, so würden wir erhalten:

$$\mathfrak{N}_1(\nu) = 4\pi\nu^2 \frac{V_1}{c_1^3}$$

und

$$\mathfrak{N}_2(\nu) = 4\pi\nu^2 \frac{V_2}{c_2^3}.$$

Der Ausdruck (13) ist formal die Summe dieser beiden Ausdrücke. Gleichwohl liegt in den Formeln die Tatsache enthalten, daß das Spektrum des gesamten Systems vollständig verschieden ist von der Übereinanderlagerung der Spektren der beiden Teilsysteme. Denn offenbar sind die höchsten Frequenzen der Teilsysteme und des ganzen Systems bestimmt aus:

$$\frac{4\pi}{3}\nu_{m1}^3 \frac{V_1}{c_1^3} = 3n_1, \qquad \frac{4\pi}{3}\nu_{m2}^3 \frac{V_2}{c_2^3} = 3n_2,$$

$$\frac{4\pi}{3}\nu_m^3 \left(\frac{V_1}{c_1^3} + \frac{V_2}{c_2^3}\right) = 3(n_1 + n_2),$$

also

$$\nu_{m1}^3 \frac{V_1}{c_1^3} + \nu_{m2}^3 \frac{V_2}{c_2^3} = \nu_m^3 \left(\frac{V_1}{c_1^3} + \frac{V_2}{c_2^3}\right).$$

Hieraus ersieht man leicht, daß ν_m zwischen ν_{m1} und ν_{m2} liegt, wenn V_1 und V_2 von Null verschieden sind. Folglich kann die Superposition der Teilspektra nicht das Gesamtspektrum liefern.

10. Wir wollen nun doch die Rechnung zu Ende führen und die Energie (bzw. freie Energie) auf Grund des Spektrums (13) wirklich berechnen, weil dadurch sehr anschaulich wird, daß sich die Energiegrößen des Systems nicht additiv aus denen der Phasen aufbauen.

Wir bezeichnen das Molekulargewicht der Substanz (das wir der Einfachheit halber beim Übergang von einer Phase in die andere als unveränderlich annehmen) mit m, die Massen der Phasen mit M_1, M_2, die gesamte Masse mit $M = M_1 + M_2$, die spezifischen Volumina der Phasen mit v_1, v_2. Dann lautet die Bestimmungsgleichung für die Maximalfrequenz:

$$\frac{4\pi}{3}\nu_m^3 \left(M_1 \frac{v_1}{c_1^3} + M_2 \frac{v_2}{c_2^3}\right) = 3N\frac{M}{m}. \qquad (14)$$

Setzen wir

$$x = \frac{h\nu}{kT}, \qquad x_m = \frac{h\nu_m}{kT},$$

wo T die Temperatur und h, k die Konstanten der Planckschen Strahlungsformel bedeuten, so folgt aus (14)

$$x_m = \frac{h}{kT}\sqrt[3]{\frac{9N}{4\pi m}\cdot\frac{M}{M_1\frac{v_1}{c_1^2} + M_2\frac{v_2}{c_2^3}}}. \qquad (15)$$

Ferner finden wir für die Dichte der Spektrallinien in der Skala x aus (13):

$$\mathfrak{N}(x) = 4\pi x^2 \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \left(M_1\frac{v_1}{c_1^3} + M_2\frac{v_1}{c_2^3}\right)$$

oder:

$$\mathfrak{N}(x) = \frac{9NM}{m x_m^3} x^2. \qquad (16)$$

Die Planckschen Resonatorformeln sind für die Energie:

$$\mathfrak{u}(x) = kT\frac{x}{e^x - 1},$$

für die freie Energie:

$$\mathfrak{h}(x) = kT\log(1 - e^{-x}),$$

für die Entropie:

$$\mathfrak{s}(x) = \frac{\mathfrak{u} - \mathfrak{h}}{T}.$$

Wir wollen der Allgemeinheit halber berücksichtigen, daß nicht die ganze Energie in Form von kleinen Schwingungen vorhanden sein wird, sondern ein Teil U_0 auf der Verschiebung der Ruhelagen beruhen kann. Dann erhalten wir für die Energie des Systems:

$$U = U_0 + \int_0^{x_m} \mathfrak{u}(x)\,\mathfrak{N}(x)\,dx,$$

für seine freie Energie:

$$H = U_0 + \int_0^{x_m} \mathfrak{h}(x)\,\mathfrak{N}(x)\,dx,$$

für seine Entropie:

$$S = \int_0^{x_m} \mathfrak{s}(x)\,\mathfrak{N}(x)\,dx.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$A = \frac{9NM}{m}kT \qquad (17)$$

und führen die obigen Ausdrücke ein, so bekommen wir nach einfacher Zwischenrechnung:

$$U = U_0 + \frac{A}{x_m^3}\int_0^{x_m} \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx, \qquad (18)$$

$$H = U_0 + \frac{A}{3}\left\{\log(1 - e^{-x_m}) - \frac{1}{x_m^3}\int_0^{x_m} \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx\right\}, \qquad (19)$$

$$S = \frac{A}{3T}\left\{\frac{4}{x_m^3}\int_0^{x_m} \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx - \log(1 - e^{-x_m})\right\}. \qquad (20)$$

Wir sehen, daß der auf Schwingungen beruhende Anteil der Energie eine Funktion von x_m allein ist, wobei x_m in seiner Abhängigkeit von den Massen und Dichten der Phasen sowie von der Temperatur durch (15) gegeben ist.

In der Tat erscheinen U und H nicht in der Form

$$\left.\begin{aligned} U &= M_1 U_1 + M_2 U_2, \\ H &= M_1 H_1 + M_2 H_2, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

wo U_1, U_2 bzw. H_1, H_2 nur von den inneren Variabeln der Phasen, nicht aber ihren Gesamtmassen abhängen. Und dies ist auch nicht approximativ der Fall (wenigstens für H).

11. Diese ausführliche Diskussion des Zweiphasensystems läßt die Grenzen der Debyeschen Methode deutlich erkennen. Man wird zu dem Schlusse geführt, daß die Schallwellen nicht ungestört von einer Phase in die andere übergehen, sondern daß dabei irgendeine Irregularität (eine Art Inkohärenz) eintritt; es geht zwar die Energie einer Welle von bestimmter Frequenz von einem Medium ins andere über, aber die Schwingungsphase muß sich dabei irgendwie unregelmäßig ändern. Ähnlich wie in der Optik sich bei inkohärenten Strahlen nicht die Amplituden, sondern die Intensitäten addieren, so muß hier herauskommen, daß die Energien der beiden Teilräume sich addieren. Ich glaube aber, daß das gar nicht am Vorhandensein zweier thermodynamischer Phasen hängt, sondern daß etwas Ähnliches schon in einem homogenen Medium stattfindet[1]). Auch hier werden die elastischen Wellen nicht beliebig weit ungestört fortlaufen, sondern unregelmäßige Phasenänderungen erfahren. Wahrscheinlich hängt von diesem Umstande die Wärmeleitung in Kristallen ab. An der Grenzfläche wird dieser Phaseneffekt besonders stark zur Geltung kommen. Ich will hier noch hinzufügen, daß von dem gewonnenen Standpunkte aus sich auch das Verfahren genauer rechtfertigen läßt, daß Courant und ich bei der Berechnung der Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung (Gesetz von Eötvös, l. c.) eingeschlagen haben; auch dabei handelt es sich um eine gewisse Inkohärenz der in die Oberflächenschicht eindringenden Wellen.

1) Auch Debye scheint derselben Ansicht zu sein (vgl. Ann. d. Phys. (4) **43**, 64, 65, 1914).

(Eingegangen 15. Januar 1914.)

Der Fundamentalbereich des Diamantgitters.

Von Ludwig Föppl.

Durch die Arbeiten der Brüder Bragg[1]) ist das Gitter des Diamanten festgestellt worden: es besteht aus zwei kubischen, flächenzentrierten Gittern, von denen das eine aus dem anderen hervorgeht durch Verschiebung längs einer Diagonale des Elementarwürfels um ein Viertel dieser Diagonale[1]). Jedes dieser beiden gleichen ineinandergestellten Bravaisschen Punktgitter für sich genommen bestimmt die dichteste Kugelpackung, die erhalten wird, indem man um jeden Punkt des Gitters als Mittelpunkt eine Kugel vom Radius $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ schlägt, wenn a die Kante des Elementarwürfels ist. Sehen wir von den zur Oberfläche der Packung gehörigen Kugeln ab, so hat jede 12 Nachbarkugeln, die sie berührt, entsprechend den 12 nächsten Nachbarn im Abstand $\frac{a}{\sqrt{2}}$ jedes Punktes des Gitters. Sprechen wir zunächst vom Fundamentalbereich dieses einfachen Bravaisschen Gitters. Nach Lord Kelvin erhält man den sogenannten natürlichen Fundamentalbereich[2]) eines Gitters folgendermaßen: man denke sich um jeden Gitterpunkt eine Kugel — etwa eine Seifenblase —, die fortwährend wächst, so daß der um jedes Atom abgegrenzte Raum jederzeit für alle Atome gleich groß ist. Wenden wir diesen Vorgang auf das kubische flächenzentrierte Raumgitter an, so werden die Kugeln so lange zunehmen, bis sich in einem bestimmten Moment die Nachbarkugeln berühren, wobei die vorhin besprochene dichteste Kugelpackung eintritt. Um den natürlichen Fundamentalbereich zu erhalten, denke man sich die um die einzelnen Punkte abgegrenzten Bereiche noch weiter gleichförmig wachsen, wobei allerdings die Kugelgestalt verloren geht, da die Bereiche nicht ineinander übergreifen sollen. Aus den Berührungspunkten der Kugeln werden beim Weiterwachsen der Bereiche Berührungsebenen, so daß schließlich, wenn alle Lücken zwischen den einzelnen Bereichen ausgefüllt sind, jeder Gitterpunkt der Mittelpunkt eines Polyeders ist. Da in unserem Beispiel der dichtesten Kugelpackung jede Kugel 12 Nachbarkugeln berührt, so werden beim Weiterwachsen der Bereiche aus den 12 Berührungspunkten der Kugeln 12 mittelsenkrechte Ebenen der Verbindungslinien des betrachteten Punktes mit seinen 12 Nachbarpunkten. Sind die Bereiche so weit gewachsen, daß sie den Raum lückenlos ausfüllen, so erhalten wir als

1) Proc. Roy. Soc. London **89**, Nr. 610.

1) Siehe die Abbildung des Diamantmodells bei P. P. Ewald, diese Zeitschr. **14**. 1304. 1913.

2) In Gegensatz zum natürlichen Fundamentalbereich stellen wir den mathematischen Fundamentalbereich. Er ist der kleinste Bereich, mit dessen Hilfe man durch Anwendung aller möglichen Deckoperationen des Raumgitters den Raum einfach und lückenlos ausfüllen kann und ist $^1/_{24}$ des hier gefundenen natürlichen Fundamentalbereichs.

natürlichen Fundamentalbereich das Rhombendodekaeder. Nebenbei ergibt sich, daß man also mit dem Rhombendodekaeder als Baustein den Raum einfach und lückenlos ausfüllen kann.

Das Diamantgitter besteht aus zwei solchen kubischen flächenzentrierten Gittern, die in der oben besprochenen Weise so ineinander gestellt sind, daß jeder Gitterpunkt des einen kubischen Gitters vier Punkte des anderen zu nächsten Nachbarn besitzt, die im gleichen Abstand von ihm an den Ecken eines regulären Tetraeders angeordnet sind. Denkt man sich also ebenso wie oben den natürlichen Fundamentalbereich durch Kugeln erzeugt, die um jeden Gitterpunkt gleichmäßig wachsen, so wird in einem bestimmten Moment jede Kugel mit vier Nachbarkugeln zusammenstoßen, so daß sich beim Weiterwachsen der Bereiche Begrenzungsebenen ausbilden, die auf den Verbindungslinien jedes Atoms mit seinen vier nächsten Nachbaratomen mittelsenkrecht stehen und daher die vier Ebenen eines regulären Tetraders bestimmen. Das Tetraeder bildet sich jedoch nicht vollständig aus, wie ja auch zu erwarten ist, da man bekanntlich mit regulären Tetraedern den Raum nicht lückenlos ausfüllen kann. Eine einfache Rechnung lehrt auch, daß dieses Tetraeder als Fundamentalbereich zu groß wäre. Es muß also der Fundamentalbereich durch Schnitt des Tetraeders mit anderen Ebenen entstehen. Diese anderen Ebenen müssen aber den Bereich des von uns betrachteten Gitterpunktes gegen die zweitnächsten Gitterpunkte abgrenzen, da unser Bereich gegen die nächsten bereits durch die Tetraederebenen abgegrenzt ist. Die zweitnächsten Gitterpunkte sind aber im Diamanten die Nachbarpunkte im betreffenden kubischen Gitter, gegen die unser Punkt nach obigem durch

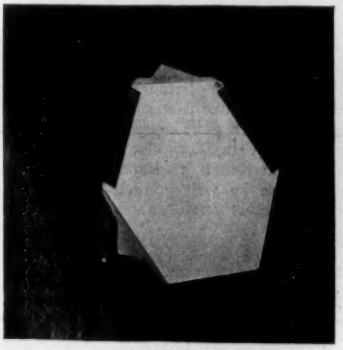


Fig. 1.

Fig. 2.

das Rhombendodekaeder abgegrenzt wird, dessen 12 Ebenen auf den Verbindungslinien mittelsenkrecht stehen. Die Schnittfigur des Tetraeders mit dem Rhombendodekaeder ist also der Fundamentalbereich des Diamantgitters, der in Fig. 1 dargestellt ist. Das Tetraeder wird vom Rhombendodekaeder so geschnitten, daß aus den Tetraederebenen

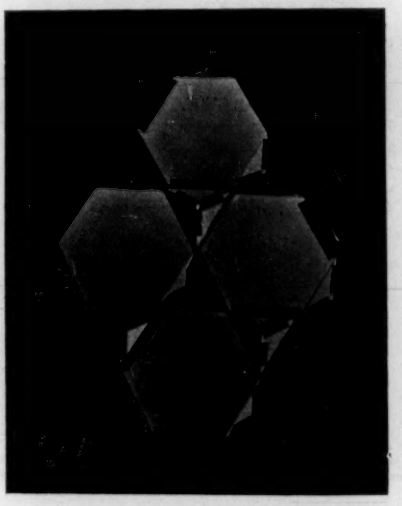


Fig. 3.

reguläre Sechsecke werden. Alle 12 Ebenen des Rhombendodekaeders treten im Fundamentalbereich des Diamanten auf, so daß man das Rhombendodekaeder durch Schneiden dieser 12 Ebenen erhalten kann. Von den acht dreizähligen Ecken des Dodekaeders sind im Fundamentalbereich des Diamanten vier sichtbar, während die vier anderen senkrecht über den Mitten der Tetraederebenen liegen. Die sechs vierzähligen Ecken des Rhombendodekaeders kommen senkrecht über den Mitten der sechs Tetraederkanten zu liegen. Schließlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß der Inhalt des so konstruierten Dodekaeders der doppelte unseres Fundamentalbereichs des Diamanten ist. Wie man mittels des Fundamentalbereichs den Raum einfach und lückenlos ausfüllen kann, geht aus den Fig. 2 und 3 hervor, wobei ich noch bemerken möchte, daß das Doppelte des Winkels, unter dem sich die Tetraeder- und Dodekaederebenen schneiden, den Kantenwinkel des Tetraeders zu 360° ergänzt. Fig. 3 ist aus Fig. 2 durch Einfügen weiterer Bausteine entstanden. Die Figuren sind auch geeignet, sich eine Vorstellung vom Aufbau des Diamantgitters zu bilden, wenn man sich in die Mitte jedes Bausteines ein Kohlenstoffatom denkt. Würde man in Fig. 2 nur immer an den Dodekaederflächen die Bausteine anlagern und nicht an den Tetraederflächen, so würden die Mittelpunkte dieser Bausteine das eine von den beiden Bravaisschen Raumgittern ausmachen, und der Raum wäre bloß zur Hälfte ausgefüllt.

Göttingen, im Januar 1914.

(Eingegangen 17. Januar 1914.)

Der Zeemaneffekt in den Quantentheorien der Serienspektren.

Von Karl F. Herzfeld.

Bisher wurden zwei Theorien aufgestellt, die die Quantenvorstellung zur Erklärung der Gesetze der Serienspektren zu benutzen versuchen, die erste von Hasenöhrl[1]), die zweite von Bohr[2]). Für keine dieser Theorien war bisher[3]) der Zeemaneffekt ausführlich berechnet, während man von einer Theorie der Spektrallinien auch hierüber bestimmte Aussagen verlangen muß. Das soll im vorliegenden für den Fall der Balmerschen Wasserstoffserie nachgetragen werden.

Beide Theorien benutzen Elektronen, die sich auf Kreisbahnen[1]) bewegen. Es befinde sich der Mittelpunkt der Kreisbahn im Anfangspunkt eines Koordinatensystems. Erregt man nun in der z-Richtung ein homogenes Magnetfeld von der Stärke $\mathfrak{H}$, so führt das Elektron eine Präzessionsbewegung aus. Man kann, wie Voigt[2]) gezeigt hat, eine Ebene durch den O-Punkt so einführen, daß das Elektron sie nicht verläßt. Die Normale auf die Ebene im O-Punkt bewegt sich dann auf einem Kegel mit der Winkelgeschwindigkeit $p = -\frac{e}{4\pi mc}\mathfrak{H}$.

Der Öffnungswinkel des Kegels ϑ hängt von den Anfangsbedingungen ab. In der Ebene bewegt sich das Elektron, als ob kein Magnetfeld vorhanden wäre, d. h. als ob nur die ursprünglichen anziehenden Kräfte sowie diejenige Zentrifugalkraft wirken würde, die der Kreisbewegung in der mitbewegten Ebene entspricht. Das gilt, wenn nur das Elektron nahe dem Mittelpunkte bleibt. Dabei sind Glieder mit p^2 in den Bewegungsgleichungen vernachlässigt, nämlich eine scheinbare Kraft in der mitbewegten Ebene von der Größe $4\pi^2 m p^2 x$, $4\pi^2 m p^2 y$.

Führen wir nun in der mitbewegten Ebene Koordinaten u, v ein, die mit x, y, z folgendermaßen zusammenhängen:

$$\begin{aligned} x &= u\cos\psi - v\cos\vartheta\sin\psi,\\ y &= u\sin\psi + v\cos\vartheta\cos\psi,\\ z &= v\sin\vartheta \qquad \psi = 2\pi p t, \end{aligned} \tag{1}$$

so ist dann:

$$\begin{aligned} u &= r\cos 2\pi\omega t,\\ v &= +r\sin 2\pi\omega t. \end{aligned} \tag{1}$$

ω ist dadurch definiert, daß die Zentrifugalkraft gleich der anziehenden Kraft ist, also:

$$\frac{m\mathfrak{v}^2}{r} = \frac{m\,4\pi^2\omega^2 r^2}{r} = \frac{|e|\,e_r}{r^2}. \tag{2}$$

Dabei ist e_r die Größe der positiven anziehenden Ladung,

$$\mathfrak{v}^2 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Wir wollen von nun an alle Größen, die sich auf das mitbewegte System, das die Präzessionsbewegung ausführt, beziehen, mit dem Index p versehen, die, die sich auf das ruhende ($z \parallel \mathfrak{H}$)

1) F. Hasenöhrl, diese Zeitschrift **12**, 931, 1911; Verh. d. D. phys. Ges. **13**, 756, 1911, ausgebaut von K. Herzfeld, Wien. Ber. **121**, 593, 1912.

2) N. Bohr, Phil. Mag. **26**, 1, 1913.

3) E. Warburg hat (Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 1259, 1913) die wohl unzulässige Beschränkung $\vartheta = 0, \pi$ benutzt. In diesem Fall kann man allerdings, wie er es tut, $\omega = \omega_A$ setzen. Betreffs der Zeichenbedeutung vgl. später.

1) Bei Bohr können es auch elliptische Bahnen sein, doch benutzen wir der bequemeren Rechnung halber Kreise.

2) W. Voigt, Ann. d. Phys. **9**, 115, 1902; vgl. auch W. Ritz, Ann. d. Phys. **25**, 676, 1908; W. Voigt, Ann. d. Phys. **36**, 880, 1911; K. Körner, Verh. d. D. phys. Ges. **15**, 69, 1913.

beziehen, mit dem Index h. Wir haben also oben ω_p zu schreiben. Setzen wir die Werte von u, v in (I) ein, so wird

$$\begin{aligned} x &= r(\cos 2\pi\omega_p t \cos 2\pi p t - \\ &\quad - \sin 2\pi\omega_p t \sin 2\pi p t \cos\vartheta) = \\ &= \frac{r}{2}[(1+\cos\vartheta)\cos(2\pi\omega_{1h}t) + \\ &\quad + (1-\cos\vartheta)\cos(2\pi\omega_{2h}t)], \\ y &= \frac{r}{2}(\cos 2\pi\omega_p t \sin 2\pi p t + \\ &\quad + \sin 2\pi\omega_p t \cos 2\pi p t \cos\vartheta) = \\ &= \frac{r}{2}[(1+\cos\vartheta)\sin(2\pi\omega_{1h}t) - \\ &\quad - (1-\cos\vartheta)\sin(2\pi\omega_{2h}t)], \\ z &= r\sin 2\pi\omega_{3h}t\sin\vartheta, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\omega_{1h} = \omega_p + p \quad \omega_{2h} = \omega_p - p \quad \omega_{3h} = \omega_p. \tag{4}$$

In bezug auf das ruhende System treten also 3 Werte auf.

Ferner seien noch einige Größen angegeben. Die kinetische Energie in bezug auf u, v ist:

$$T_p = \frac{m\mathfrak{v}^2}{2} = m\omega_p^2 r^2 2\pi^2 = \frac{e e_r}{2r}, \tag{5}$$

in bezug auf xyz

$$T_a = 2\pi^2 m r^2(\omega^2 + 2\omega p\cos\vartheta).$$

Die Arbeit, die ich leisten muß, um ein ruhendes Elektron von der Stelle r in unendliche Entfernung zu bringen, so daß es am Ende keine kinetische Energie besitzt, ist:

$$P = e\int_r^\infty \frac{e_r}{r^2}\,dr. \tag{6}$$

Die Arbeit, die man leisten muß, um ein bewegtes Elektron in unendliche Entfernung und zur Ruhe zu bringen, ist

$$w = P - T, \tag{7}$$

Nun wollen wir diese Formeln auf die beiden Theorien anwenden:

I. Die Bohrsche Theorie. Bohr geht vom Rutherfordschen Atommodell aus, das aus einem positiven Kern von sehr kleinem Radius besteht, der von Elektronen umgeben ist. Bei Wasserstoff ist nur ein Elektron im neutralen Atom vorhanden.

Nun nimmt Bohr weiter an, daß in den Gleichgewichtslagen die Bewegung durch die gewöhnlichen mechanischen Gesetze beherrscht wird, daß dagegen der Übergang aus einer Gleichgewichtslage in die andere von Quantengesetzen bestimmt wird, die nur einzelne bestimmte Gleichgewichte zulassen. Ferner soll das Teilchen bei der Bewegung in Gleichgewichtslagen nicht strahlen, sondern nur beim Übergang zwischen zwei solchen, dann aber monochromatisch, wobei die Frequenz nach Quantenformeln durch die Energie bestimmt ist.

Im speziellen sind die Gleichgewichtslagen der Frequenz ω dadurch bestimmt, daß ein Elektron, das im Unendlichen ruhte, bei der Bindung eine Energie w ausstrahlt vom Betrag:

$$w = \frac{nh\omega}{2}. \tag{8}$$

Setzt man das in 2, 5, 6, 7 ein, so findet man für die möglichen Gleichgewichtslagen:

$$\omega = \frac{4\pi^2 m e^4}{h^3 n^3}, \quad w = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 n^2}, \quad \pi = \frac{E e}{4\pi^2 m} h^2 n^2. \tag{9}$$

w ist hier (wegen $e_r = e =$ konst) allgemein $= T$.

Geht nun ein Elektron von einer Gleichgewichtslage (n) in eine andere (m) über, so wird dabei die Energie $w_m - w_n$ ausgestrahlt werden, und zwar soll die Frequenz dieser monochromatischen Strahlung

$$\nu = \frac{w_m - w_n}{h} \tag{10}$$

sein.

Also wird

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

das ist also die nach Rydberg und Ritz verallgemeinerte Balmersche Formel, wobei die multiplikative Konstante mit der experimentell gefundenen sehr gut übereinstimmt.

Bei Vorhandensein eines Magnetfeldes sind nun verschiedene Annahmen von vornherein möglich. Es könnte nämlich in 9 und 10 sein:

ω	w	ν
ω_p	w_p	ν_p
ω_p	w_p	ν_h
ω_p	w_h	ν_p
ω_p	w_h	ν_h

Ferner dasselbe mit $\omega = \omega_h$, doch hat das wohl keinen Sinn, da es verschiedene ω_h gibt.

Die einfachste Annahme ist wohl die erste, d. h. alle Quantengesetze beziehen sich auf ein mitbewegtes System.

$w_p = P - T_p$ ist allerdings nicht die Arbeit, die man aufwenden müßte, um ein Elektron ins Unendliche zu bringen, so daß es im mitbewegten System ruht, denn diese Arbeit ist ∞. Das rührt von der früher erwähnten vernachlässigten Kraft $4\pi^2 m p^2 x$, $4\pi^2 m p^2 y$ her, die im ∞ von erster Ordnung unendlich wird. (Wie weit ihre Vernachlässigung gerechtfertigt ist, vergleiche später.) w_p ist die Arbeit, die man zu

leisten hätte, wenn die Ebene ruhte. Man schreibt daher statt w_p besser T_p. Dann gilt (für kleine r) im mitbewegten System alles, wie wenn kein Feld da wäre. Bezeichnen wir die Größen ohne Feld mit dem Index o, so ist $w_p = w_o$, $\omega_p = \omega_o$, $\nu_p = \nu_o$.

Nehmen wir ferner noch an, daß der Polarisationszustand der emittierten Welle r_p derselbe ist, wie wenn sie in der klassischen Theorie von einem Elektron ausgesandt würde, das sich auf einem Kreis mit der Winkelgeschwindigkeit ν_p bewegt, so ist

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}\cos 2\pi\nu_p t, \quad \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}\sin 2\pi\nu_p t,$$

also:

$$\nu_{h1} = \nu_o + p, \quad \nu_{h2} = \nu_o - p, \quad \nu_{h3} = \nu_o,$$

$$p = -\frac{e\mathfrak{H}}{4\pi mc},$$

also ein normales Triplett mit den richtigen Polarisationen, wie man leicht sieht[1]).

Nach der zweiten Annahme ist ω_p wie oben $= \omega_o$, dagegen

$$\nu_0 = \frac{w_{om} - w_{on}}{h} = \frac{w_{pm} - w_{pn}}{h} = \nu_h,$$

so daß keine Zerlegung resultiert.

Setzt man drittens $w = w_k$, so hat man

$$T_k = 2\pi^2 m r^2 (\omega^2 + 2\omega p\cos\vartheta)$$

(mit Vernachlässigung von p^2) ferner

$$4\pi^2 m\omega^2 r^2 = \frac{e^2}{r} = P,$$

$$w_k = \frac{e^2}{2r}\left(1 - 2\frac{p}{\omega}\cos\vartheta\right).$$

Setzen wir ferner $r = r_0 + \Delta r$, $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ und vernachlässigen

$$\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2, \quad \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2, \quad \frac{\Delta\omega\cdot p}{\omega^2},$$

so bekommen wir aus

$$4\pi^2 m\omega^2 r^3 = e^2 = 4\pi^2 m\omega_0^2 r_0^3 \qquad (2)$$

$$2\frac{\Delta\omega}{\omega_0} + 3\frac{\Delta r}{r_0} = 0,$$

$$w_k = \frac{e^2}{2r_0}\left(\left(1 - \frac{\Delta r}{r_0} - \frac{2p}{\omega}\cos\vartheta\right)\right) =$$

$$= \frac{e^2}{2r_0}\left[1 + \frac{2}{3\omega_0}(\Delta\omega - 3p\cos\vartheta)\right] =$$

$$= w_0\left[1 + \frac{2}{3\omega_0}(\Delta\omega - 3p\cos\vartheta)\right].$$

Nun soll gelten

$$w_k = \frac{nh}{2}\omega_p = \frac{nh}{2}\omega_0\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right), \quad w_0 = \frac{nh}{2}\omega_0.$$

Das gibt

$$\Delta\omega = -6p\cos\vartheta.$$

Ist nun weiter ν in $10 = \nu_k$, so wird

$$\nu_k = \frac{w_{kn} - w_{km}}{h} = \frac{n\omega_n - m\omega_m}{2} =$$

$$= \nu_0 + \frac{n\Delta\omega_n - m\Delta\omega_m}{2} =$$

$$= \nu_0 - 6(n-m)p\cos\vartheta.$$

Es hängt also die Verschiebung von der Nummer der Linie $(n-m)$ ab, was tatsächlich nicht der Fall ist, abgesehen von der Schwierigkeit, die von dem Faktor $\cos\vartheta$ herrührt[1]).

Setzen wir das ν in der Formel $= \nu_p$, so erhalten wir obigen Wert für ν_p und ν_k wird:

$$\nu_k = \nu_0 - 6(n-m)p\cos\vartheta,$$

$$\nu_k = \nu_0 - 6(n-m)p\cos\vartheta + p.$$

Es gilt hier dasselbe wie beim vorigen Fall. Hätte man nicht w_k, sondern T_k genommen, so wäre nur das Vorzeichen von $\cos\vartheta$ vertauscht worden. Man kann ganz allgemein zeigen, daß nur 3 Fälle möglich sind.

Betrachtet man nämlich die Gleichung

$$\Delta\nu = \frac{n\Delta\omega_n - m\Delta\omega_m}{2},$$

so wird im allgemeinen $\Delta\nu$ von $n-m$ abhängen, wobei für

$$\nu = \nu_k \text{ oder } \nu = \nu_p$$

$$\nu_k = \nu_0 + \Delta\nu \text{ oder } \nu_{1,2\,k} = \nu_0 + \Delta\nu \pm p,$$

$$\nu_{3\,k} = \nu_0 + \Delta\nu$$

ist, also erstens ein Effekt, der von $n-m$ abhängt. Soll $\Delta\nu$ von $n-m$ nicht abhängen, so zeigt man leicht, daß dann $\Delta\omega_n = \frac{k}{n}$ sein muß, also $\Delta\nu = 0$.

Nun kann wieder $\nu = \nu_k$ sein, dann ist $\nu_k = \nu_0$, also als zweite Möglichkeit gar kein Effekt, oder $\nu = \nu_p$, dann ist

$$\nu_{1,2\,p} = \nu_0 \pm p, \quad \nu_{3\,p} = \nu_0,$$

also drittens ein normales Triplett.

Bei der Bohrschen Theorie können wir jedoch bei den Serienlinien mit großem $n-m$ die Kraft[2]) $4\pi^2 m p^2 x$, $4\pi^2 m p^2 y$ nicht mehr vernachlässigen, da dort r groß gegen den Atomradius ist, wenn wir $w = w_p$ bzw. $T = T_p$ setzen.

Es tritt dann für $\vartheta = 0, \pi$ an Stelle von (2):

$$\frac{m v_p^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} - 4\pi^2 m p^2 r \qquad (2')$$

oder

1) Wie in der Ritzschen Theorie, vgl. K. Koerner, l. c.

1) Vgl. die Seite 193 r. Sp. Anm. 2 zitierten Arbeiten.

2) Das ist im Wesen der Zentrifugalkraft, die von der Präzessionsbewegung herrührt.

$$4\pi^2 m r^3 (\omega^2 + p^2) = e^2,$$

$$\frac{3\Delta r}{r_0} + \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{p^2}{{\omega_0}^2} = 0,$$

$$w_p = \frac{e^2}{r} - \frac{m v_p^2}{2}$$

wird

$$w_p = \frac{e^2}{2r} + 2\pi^2 m p^2 r^2 = w_0 \left(1 - \frac{\Delta r}{r_0} + \frac{p^2}{{\omega_0}^2}\right).$$

Setzt man

$$w_p = \frac{nh}{2}\omega = \frac{nh}{2}(\omega_0 + \Delta\omega) =$$

$$= w_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right),$$

so wird schließlich

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 4\frac{p^2}{{\omega_0}^2},$$

hätte man statt w_p T_p benutzt, so wäre an Stelle von 4 — 2 aufgetreten.

Wir schreiben also $\Delta\omega = 2a\frac{p^2}{\omega_0}$, wo a entweder 2 oder — 1 bedeutet. Dann ist

$$\Delta\nu = \frac{n\Delta\omega_n - m\Delta\omega_m}{2} = a p^2 \left(\frac{n}{{\omega_0}_n} - \frac{m}{{\omega_0}_m}\right).$$

Nun ist $\omega_{0n} = \frac{2N}{n^3}$, wo N die Konstante der Balmerschen Formel in sec^{-1} bedeutet.

$$\Delta\nu = \frac{a p^2}{2N}(n^4 - m^4), \quad n < m$$

ist also $\nu = \nu_p$, so ist $\nu_{1,2,k} = \nu_0 + \Delta\nu \pm p$, $\nu_{3k} = \nu_0 + \Delta\nu$, wir haben ein normales Triplett, das als ganzes um den Betrag $\Delta\nu$ verschoben ist. Zur bequemeren Übersicht über die Größe von $\Delta\nu$ bemerken wir, daß p die Aufspaltung in Frequenzen, $\frac{\Delta\nu}{p}$ also das Verhältnis $\frac{\text{Verschiebung}}{\text{Aufspaltung}}$ bedeutet. N ist die Frequenz am Serienende, $\frac{p}{N} = \frac{d\lambda}{\lambda}$ die relative Zerlegung am Serienende. Es ist also

$$\frac{\Delta\nu}{p} = \frac{a}{2}(n^4 - m^4)\left(\frac{d\lambda}{\lambda}\right)\nu = N.$$

Da $\frac{d\lambda}{\lambda}$ für $\mathfrak{H} = 30000$ Gauß von der Größenordnung $5{,}2 \cdot 10^{-5}$ ist, ist das sehr klein; für kleine n, m, z. B. für $n = 2$, $m = 6$, $\frac{\Delta\nu}{p} = 6 \cdot 10^{-2}$ (oder $3 \cdot 10^{-2}$) oder die Verschiebung $^1/_{16}$ (oder $^1/_{32}$) der Zerlegung, am Serienende aber für $n = 2$, $m = 12$ (10. Linie der Balmerschen Serie) schon 1,1. Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ erhält man in erster Näherung dieselbe Formel, nur mit $a = 1$ $\left(\text{oder } -\frac{1}{2}\right)$. Für die anderen ϑ-Werte wird die Rechnung sehr kompliziert, doch dürfte die Verschiebung wohl zwischen diesen zwei Grenzen liegen, so daß jede Linie des Tripletts die Breite $\frac{ap^2}{2N}(n^4 - m^4)$ $a = 1$ $\left(\text{oder } \frac{1}{2}\right)$ bekommt, während der Verschiebung der Mitte $a = \frac{3}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{3}{4}\right)$ entspricht. Dieser Effekt rührt wesentlich daher, daß die Serienlinien mit großem m von Elektronen herrühren, bei denen der Kreisbahnradius r groß gegen den Atomradius ist. Es ist $\Delta\nu$ direkt ein Maß für r und damit diese Verschiebung und Verbreiterung ein guter Prüfstein der Theorie.

II. Das modifizierte Thomsonsche Atommodell. Herr Hasenöhrl ging in seinem Vortrag von folgendem Gedanken aus: Wenn man einen nichtmonochromatischen Resonator hat, bei dem die Frequenz von der Energie abhängt, und es sind nur ganz bestimmte Energiewerte möglich, dann sind auch nur ganz bestimmte Frequenzwerte möglich, d. h. wir erhalten ein Linienspektrum. Beim monochromatischen Resonator setzt Planck an:

$$h = \frac{1}{\nu}(E_{n+1} - E_n).$$

Rechts steht das Flächenelement der Phasenebene, das von den zwei aufeinander folgenden, möglichen Energiekurven $E = E_n$, $E = E_{n+1}$ begrenzt wird. Diese Deutung von h wird beibehalten, es wird also gesetzt:

$$h = \int_{E_n}^{E_{n+1}} \frac{1}{\nu} dE = \int_{\nu_n}^{\nu_{n+1}} \frac{1}{\nu}\frac{dE}{d\nu} d\nu,$$

$$\int_{\nu_0}^{\nu_n} \frac{1}{\nu}\frac{dE}{d\nu} d\nu = hn.$$

Dann läßt sich $\frac{dE}{d\nu}$ stets so bestimmen, daß eine beliebige Serienformel herauskommt. Ich denke mir nun eine positiv geladene Kugel, deren Dichte vom Radius abhängt. Die Kugel mit dem Radius r umschließt die Ladung e_r. In ihr bewege sich ein Elektron auf Kreisbahnen konzentrisch um den Mittelpunkt, die möglichen Kreisbahnen sind durch den Quantenansatz gegeben. Es ist e_r so zu bestimmen, daß der

verlangte Zusammenhang zwischen E und ν herauskommt. (Das ausgesandte Licht habe die Frequenz und Polarisation, wie wenn für die Ausstrahlung die klassische Elektrodynamik gelten würde.) Aus

$$\frac{4\pi^2 m \nu^2 r^2}{r} = \frac{e_R}{r^2} \cdot e$$

findet man nach einigen Rechnungen allgemein

$$\frac{h}{2\pi} = 2\pi m (r_{n+1}^2 \nu_{n+1} - r_n^2 \nu_n),$$

ferner speziell für die Balmersche Formel

$$r_n^2 = \frac{h}{16\pi^2 m} \frac{1}{N} \frac{n^2}{n+2}$$

$$(e_r)_{r=r_n} = \frac{h^2}{4\pi^2 m e} \frac{1}{r} \left(\frac{8\pi^2 m r^2}{h} N - 2 + 8\pi^2 m \frac{N}{h} r \sqrt{r^2 + \frac{2h}{\pi^2 m N}} \right)^2 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e} \frac{n-2}{r},$$

dabei ist aber $\left(\frac{de}{dr}\right)_{r=r_n}$ noch unbestimmt.

Schalten wir jetzt das Magnetfeld ein, so entsteht wieder eine Präzessionsgeschwindigkeit

$$p = -\frac{1}{2\pi} \frac{e}{2mc} \mathfrak{H}.$$

Die Kraft $4\pi^2 m p^2 x$, $4\pi^2 m p^2 y$ können wir jetzt ruhig vernachlässigen, da sich alles im Atom abspielt. Es sind wieder 2 Fälle möglich.

1. E kann auf die Ebene $u\,v$ bezogen sein.

Dann bleibt in dieser Ebene alles unverändert, die Frequenz bleibt ν_{0n}, für den ruhenden Beobachter entsteht der normale Effekt $\nu_n \pm p$, ν_n.

2. E ist auf den ruhenden Beobachter bezogen.

Also

$$E = T + e\int_0^r \frac{e_r}{r^2} dr = 2\pi^2 m \nu^2 r^2 + e\int_0^r \frac{e_r}{r^2} dr + 4\pi^2 m r^2 \nu p \cos\vartheta.$$

Da ferner in bezug auf u, v keine direkte Kraftwirkung auftritt, ist

$$\frac{m\mathfrak{v}^2}{r} = 4\pi^2 m \frac{\nu^2 r^2}{r} = \frac{e_r e}{r^2},$$

$$4\pi^2 \frac{m}{e} \nu^2 r^3 = (e_r)_{r=r_n}$$

(ν ist natürlich die Frequenz in der u, v-Ebene ($\mathfrak{v}^2 = u'^2 + v'^2$)).

Bezeichnen wir die Größen ohne Feld mit dem Index o, so war

$$E_0 = 2\pi^2 m \nu_0^2 r_0^2 + e\int_0^{r_0} \frac{e_r}{r^2} dr,$$

$$4\pi^2 m \nu_0^2 r_0^3 = (e_r)_{r=r_0}.$$

Setzen wir $r = r_0 + \Delta r$, $\nu = \nu_0 + \Delta\nu$ und behalten nur die erste Ordnung in Δr, Δr, so wird nach (2)

$$\frac{3\Delta r}{r} + \frac{2\Delta\nu}{\nu} = \Delta r \frac{d \lg e_r}{dr},$$

$$\frac{\Delta r}{r}\left(3 - \frac{d\lg e_r}{d\lg r}\right) = -\frac{2\Delta\nu}{\nu}. \qquad (11)$$

Für das Integral haben wir $\frac{1}{\nu}\frac{dE}{dr}$ zu bilden und erhalten

$$\frac{1}{\nu}\frac{dE}{dr} = \frac{d}{dr}(4\pi^2 m r^2 \nu) + 4\pi^2 m p \cos\vartheta \frac{1}{\nu}\frac{d}{dr}(\nu r^2),$$

$$h = \int_r^{r_{n+1}} \frac{1}{\nu}\frac{dE}{dr} dr$$

wird

$$h = 4\pi^2 m (r_{n+1}^2 \nu_{n+1} - r_n^2 \nu_n) + 4\pi^2 m \omega \cos\vartheta \int_r^{r_{n+1}} \frac{1}{\nu}\frac{d(\nu r^2)}{dr} dr,$$

da $\nu_{0,2} = 0$, $r_{0,2}$ endlich ist, übt das Feld auf das Elektron in der Lage $n = 2$ keine Wirkung aus, d. h. $\nu_2 = \nu_{0,2} = 0$, $r_2 = r_{0,2}$. Wenden wir unsere Formel $n - 2$ mal an, so finden wir

$$h\frac{n-2}{4\pi^2 m} = r_n^2 \nu_n + \cos\vartheta\, p \int_{r_2}^{r_n} \frac{1}{\nu}\frac{d(r^2\nu)}{dr} dr.$$

Da das letzte Glied schon mit p multipliziert ist, können wir hier $r\,\nu$ mit $r_0\,\nu_0$ vertauschen. Partielle Integration und Benutzung von Gleichung 2 ergibt dann für das Integral

$$A_n = \frac{1}{4}(r_{0n}^2 - r_{02}^2) + \frac{1}{2}\int_{r_{02}}^{r_{0n}} r^2 \frac{d\lg e_r}{dr} r.$$

Ferner besteht die Gleichung

$$h\frac{n-2}{4\pi^2 m} = r_{0n}\nu_{0n}.$$

Das ergibt

$$0 = 2 r_0 \nu_0 \Delta r + r_0^2 \Delta\nu + p\cos\vartheta A_n.$$

Mit (1) vereinigt, finden wir zuletzt

$$\Delta\nu = -\frac{p\cos\vartheta}{1 - \frac{1}{4}\frac{d\lg e}{d\lg r}} \frac{1}{r} A_n.$$

Da man e_r nur für $r = r_0$ kennt, kann man es natürlich noch so bestimmen, daß erstens der Faktor von $p \cos \vartheta$ von n nicht abhängt und zweitens noch einen beliebigen Wert annimmt. Dagegen ist $\Delta\nu \cos \vartheta$ proportional, gibt daher nur dann scharfe Linien, wenn nur bestimmte ϑ-Werte möglich sind. Kann $\cos \vartheta = \pm a$ sein, so ist also $\Delta\nu = \pm p\, b$, also bei transversaler Beobachtung ein Sextuplett

$$\nu = \nu_0 + \Delta\nu, \quad \nu = \nu_0 + \Delta\nu \pm p, \quad \nu = \nu_0 - \Delta\nu \pm p$$

vorhanden, bei longitudinaler ein Quadruplett (die zuerst angeführten beiden Linien fallen weg). Doch dürfte in größeren Gasmassen kaum das ganze Sextuplett ausgestrahlt werden, ebenso ist das Auftreten nur eines Winkels ϑ unerklärlich. (Dieselben Schwierigkeiten sind ja in der Ritzschen Theorie vorhanden.) Auch hier ist also die erste Annahme (normales Triplett) das wahrscheinlichste.

Zusammenfassung. Es wird der Zeemaneffekt für die beiden vorhandenen Quantentheorien der Spektralserien, die Hasenöhrlsche und die Bohrsche, berechnet. In beiden Theorien nimmt das Elektron im Magnetfeld eine Präzessionsbewegung an. Es sind nun in beiden Theorien von vornherein mehrere Annahmen möglich. Die einfachste und plausibelste ist, daß die Quantengesetze in bezug auf eine Ebene gelten, die die Präzessionsbewegung mitmacht. Dann treten in beiden Theorien normale Tripletts auf. Doch ergibt die Bohrsche Theorie außerdem eine Verschiebung und Verbreiterung des ganzen $\sim \mathfrak{H}^2$, die bei Linien mit höherer Seriennummer beträchtlich wird und eine notwendige Folge des Umstands ist, daß der Bahnradius des Elektrons groß gegen den Atomradius ist.

Wien, 8. Januar 1914.

(Eingegangen 9. Januar 1914.)

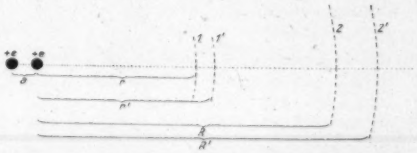
Über ein Modell zur Erklärung der Lichtemission. II.

Von E. Gehrcke.

§ 4[1]). Da die Balmersche Wasserstoffserie eine Nebenserie ist, so kann man den Versuch machen, auch die Nebenserien der Alkalimetalle durch ein dem Wasserstoff nachgebildetes Atommodell aus einem positiven Kern und einem Elektron zu erklären. Während aber die Träger der Balmerschen H-Serie vermutlich ein nach außen hin neutrales System aus einem positiven Kern $+e$ und einem Elektron $-e$ sind, so sind die Träger der Alkaliserien vermutlich positive Ionen. Denn die Versuche an Lithium- und Natriumanodenstrahlen zeigen, daß die leuchtenden Strahlen elektrisch und magnetisch als einwertige Ionen abgelenkt[1]) werden. Reichenheim[2]) hat gefunden, daß diese Strahlen die erste Nebenserie und die Hauptserie aussenden. Wir werden also dahin streben, von einem Modell des Alkaliions diese Serien zu erhalten.

Die einfachste Annahme, die wir über das leuchtende Alkaliion machen können, wenn wir die Lichtemission in Übereinstimmung mit dem Zeemaneffekt durch schwingende, negative Ladung erklären wollen, ist die, eine doppelte, positive Ladung im Kern vorauszusetzen. Der Träger wird dann durch ein System dargestellt, das aus zwei gleichen, positiven Kernladungen, die den kleinen Abstand a voneinander haben mögen, und einem Elektron gebildet ist. Das Leuchten dieses Systems kommt dadurch zustande, daß das Elektron unter der Wirkung einer elektrostatischen Kraft aus einer gewissen, ausgezeichneten Entfernung R in eine kleinere ausgezeichnete Entfernung r fällt und die dabei gewonnene kinetische Energie $\frac{m}{2} v^2$ in Schwingungen $h\nu$ verwandelt (vgl. § 1). Bei dem einfacher gebauten H-Atom waren die Isopotentialflächen des Kerns Kugelschalen; hier beim Alkali, das zwei Kernladungen hat, ist es natürlich, anzunehmen, daß die Isopotentialflächen ellipsoidische Gestalt haben, und erst in großen Entfernungen werden die Ellipsoide merklich Kugeln sein. Wie beim Wasserstoff nehmen wir an, daß nur ganz bestimmte, ausgezeichnete Isopotentialflächen die Fähigkeit haben, das Elektron festzuhalten oder loszulassen. Diese ausgezeichneten Flächen, an denen das Elektron entweder startet oder an denen es stoppt, nenne ich im folgenden kurz Stufenflächen oder Stufen. Wir können also sagen, daß das Leuchten des Atoms oder Ions dadurch veranlaßt wird, daß ein Elektron von Stufe zu Stufe fällt.

Der zweifachen Kernladung ist es nur folgerichtig, eine doppelte Schar von Stufen entsprechen zu lassen; in der Figur seien 1, 1′; 2, 2′



1) Vgl. E. Gehrcke, diese Zeitschr. **15**, 123, 1914.

1) E. Gehrcke u. O. Reichenheim, Ann. d. Phys. **25**, 879, 1908.

2) O. Reichenheim, Ann. d. Phys. **33**, 752, 1910.

solche Stufenpaare. Die Entfernungen des beliebigen Stufenpaares 1, 1′ vom nächsten positiven Kern längs der großen Achse der Ellipsoide seien r und r', die Entfernungen eines beliebigen anderen Stufenpaares, z. B. 2, 2′, seien R und R'. Der Abstand der positiven Kerne voneinander ist a. Dann gewinnt das Elektron durch den Übergang von der Entfernung R in die Entfernung r auf der großen Achse der Ellipsoide (oder zwischen beliebigen Punkten der Isopotentialflächen) eine lebendige Kraft, deren Betrag ist:

$$T = -\frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{R+a} + \frac{e^2}{r+a} = h\nu_{\mathrm{II}}. \quad (1)$$

Wenn in verschiedenen Leuchtprozessen die Größe R Werte hat, die verschiedenen Stufen 2, 3, 4, 5 ... entsprechen, während r den der Stufe 1 entsprechenden Wert besitzt, so wird die durch Gl. (1) dargestellte Linienserie emittiert. Wenn das Elektron aber nicht zur Stufe 1, sondern nur bis zur Stufe 1′ gekommen wäre, so würde die Energie sein:

$$T' = -\frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{r'} - \frac{e^2}{R+a} + \frac{e^2}{r'+a} = h\nu'_{\mathrm{II}}. \quad (2)$$

Es entsteht dann also eine zweite Serie von Schwingungen. Entsprechende Serien erhält man, wenn das Elektron aus den Entfernungen R' nach r oder r' gelangt:

$$-\frac{e^2}{R'} + \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{R'+a} + \frac{e^2}{r+a} = h\nu_{\mathrm{I}} \quad (3)$$

$$-\frac{e^2}{R'} + \frac{e^2}{r'} - \frac{e^2}{R'+a} + \frac{e^2}{r'+a} = h\nu'_{\mathrm{I}}. \quad (4)$$

§ 5. Nun fragt es sich, welches die geometrische Anordnung der Stufenflächen ist. So einfach, wie beim Wasserstoff [vgl. § 1 Gl. (1) und (1a)], wird es nicht sein; ich habe folgenden Ansatz mit einigem Erfolg probiert, ohne behaupten zu wollen, daß er der einzig mögliche oder der exakt richtige sei:

$$\left.\begin{aligned} r &= r_1 + q^2 r_0 \\ r' &= r_1 + q^2 (r_0 + a) \\ R &= r_1 + p^2 r_0 \\ R' &= r_1 + p^2 (r_0 + a), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wo p und q ganze Zahlen, r_1 und r_0 gewisse unbekannte Fundamentalentfernungen sind.

Hieraus folgt für spezielle Werte von q folgendes:

A. $q = 0$.

Es ergibt sich aus (1) und (2) die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^2}{r_1}\Big[-\frac{1}{1+p^2\beta} + 1 - \frac{1}{1+p^2\beta+\alpha} \\ + \frac{1}{1+\alpha}\Big] = hN. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Aus Gl. (3) und (4):

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^2}{r_1}\Big[-\frac{1}{1+p^2(\beta+\alpha)} + 1 \\ - \frac{1}{1+p^2(\beta+\alpha)+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}\Big] = hN'. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{a}{r_1} = \alpha, \quad \frac{r_0}{r_1} = \beta.$$

N und N' sind die Schwingungszahlen.

Aus (6) und (7) folgt, daß $N' - N$ für $p = \infty$ verschwindet. Dies ist die Eigenschaft der Hauptserie der Alkalien.

B. $q = 1$.

Es folgt aus (1):

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^2}{r_1}\Big[-\frac{1}{1+p^2\beta} + \frac{1}{1+\beta} - \frac{1}{1+p^2\beta+\alpha} \\ + \frac{1}{1+\beta+\alpha}\Big] = h\nu_{\mathrm{II}}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Aus (2) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^2}{r_1}\Big[-\frac{1}{1+p^2\beta} + \frac{1}{1+\beta+\alpha} \\ - \frac{1}{1+p^2\beta+\alpha} + \frac{1}{1+\beta+2\alpha}\Big] = h\nu'_{\mathrm{II}}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Aus (3) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^2}{r_1}\Big[-\frac{1}{1+p^2(\beta+\alpha)} + \frac{1}{1+\beta} \\ - \frac{1}{1+p^2(\beta+\alpha)+\alpha} + \frac{1}{1+\beta+\alpha}\Big] = h\nu_{\mathrm{I}}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Aus (4) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^2}{r_1}\Big[-\frac{1}{1+p^2(\beta+\alpha)} + \frac{1}{1+\beta+\alpha} \\ - \frac{1}{1+p^2(\beta+\alpha)+\alpha} + \frac{1}{1+\beta+2\alpha}\Big] = h\nu'_{\mathrm{I}}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

An diesen Gleichungen (8) bis (11) ist bemerkenswert, daß

1. für einen bestimmten Wert von p die Differenz $\nu_{\mathrm{II}} - \nu_{\mathrm{II}}' = \nu_{\mathrm{I}} - \nu_{\mathrm{I}}'$ ist; dies ist die Haupteigenschaft der Nebenserien der Alkalien;

2. für $p = \infty$ wird $\nu_{\mathrm{II}} = \nu_{\mathrm{I}}$, $\nu_{\mathrm{II}}' = \nu_{\mathrm{I}}'$; dies ist ebenfalls eine bekannte Eigenschaft der Nebenserien der Alkalien.

Wir sprechen nunmehr die Gl. (6) und (7) als Hauptserie, (8) und (9) als zweite, (10) und (11) als erste Nebenserie an. Dann folgt zunächst weiter, daß für $p = 1$:

$$\nu_{\mathrm{II}} - \nu_{\mathrm{II}}' = \nu_{\mathrm{I}} - \nu_{\mathrm{I}}' = \frac{1}{1+\beta} - \frac{1}{1+\beta+2\alpha} = N' - N.$$

Dies ist eine Beziehung zwischen den Nebenserien und der Hauptserie der Alkalien, die erfahrungsmäßig für einen bestimmten Wert von

p erfüllt wird. Für $p = 3$ besteht sie allerdings nicht.

§ 6. Es mag nunmehr ein Vergleich der gewonnenen Formeln mit den empirischen Formeln des Natriums, das gut untersucht ist, folgen. Wir finden bei Entwicklung nach Potenzen von p aus den Gl. (6) bis (11):

$$\text{Hauptserie} \quad \left\{ \begin{aligned} N &= \frac{e_2}{hr_1}\left[1 + \frac{1}{1+\alpha} - \frac{2}{\beta}p^{-2} + \frac{2+\alpha}{\beta^2}p^{-4} - + \cdots\right] \\ N' &= \frac{e^2}{hr_1}\left[1 + \frac{1}{1+\alpha} - \frac{2}{\beta+\alpha}p^{-2} + \frac{2+\alpha}{(\beta+\alpha)^2}p^{-4} - + \cdots\right] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\text{2. Nebenserie} \quad \left\{ \begin{aligned} \nu_{II} &= \frac{e^2}{hr_1}\left[\frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\beta+\alpha} - \frac{2}{\beta}p^{-2} + \frac{2+\alpha}{\beta^2}p^{-4} - + \cdots\right] \\ \nu_{II}' &= \frac{e^2}{hr_1}\left[\frac{1}{1+\beta+\alpha} + \frac{1}{1+\beta+2\alpha} - \frac{2}{\beta}p^{-2} + \frac{2+\alpha}{\beta^2}p^{-4} - + \cdots\right] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\text{1. Nebenserie} \quad \left\{ \begin{aligned} \nu_1 &= \frac{e_2}{hr_1}\left[\frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\beta+\alpha} - \frac{2}{\beta+\alpha}p^{-2} + \frac{2+\alpha}{(\beta+\alpha)^2}p^{-4} - + \cdots\right] \\ \nu_1' &= \frac{e^2}{hr_1}\left[\frac{1}{1+\beta+\alpha} + \frac{1}{1+\beta+2\alpha} - \frac{2}{\beta+\alpha}p^{-2} + \frac{2+\alpha}{(\beta+\alpha)^2}p^{-4} - + \cdots\right] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die empirischen Natriumserien sind nach Kayser und Runge[1]):

$$\text{Hauptserie} \quad \left\{ \begin{aligned} 10^8 \cdot \lambda^{-1} &= 41550{,}33 - 130710\,p^{-2} - 793751\,p^{-4} \\ 10^8 \cdot \lambda^{-1} &= 41542{,}51 - 130233\,p^{-2} - 800791\,p^{-4} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\text{1. Nebenserie} \quad \left\{ \begin{aligned} 10^8 \cdot \lambda^{-1} &= 24510{,}21 - 110606\,p^{-2} - 177{,}6\,p^{-4} \\ 10^8 \cdot \lambda^{-1} &= 24492{,}32 - 110585\,p^{-2} - 176{,}6\,p^{-4} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\text{2. Nebenserie} \quad \left\{ \begin{aligned} 10^8 \cdot \lambda^{-1} &= 24565{,}83 - 120715\,p^{-2} - 197835\,p^{-4} \\ 10^8 \cdot \lambda^{-1} &= 24549{,}12 - 120726\,p^{-2} - 197835\,p^{-4} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Beim Vergleich dieser empirischen mit den theoretischen Formeln ist zunächst zu beachten, daß eine völlige Identität von vornherein nicht erwartet werden kann. Kayser sagt z. B. l. c. S. 515, daß diese empirischen Serienformeln nicht den wahren Ausdruck, sondern nur gut konvergente Entwicklungen darstellen und daß in Wahrheit noch höhere Glieder fehlen. Daher kommt es z. B., daß die am besten gemessenen Wellenlängen der Hauptserie, die D-Linien, besonders stark von den nach (15) berechneten verschieden ausfallen, weil diese einem niedrigen Wert von p (nämlich hier $p = 3$) entsprechen, so daß die höheren Glieder der Reihe von merklichem Einfluß sind.

Wenn man aber von der Forderung exakter Übereinstimmung absieht, so zeigen die obigen theoretischen mit den empirischen Formeln eine unverkennbare Ähnlichkeit. Hervorgehoben sei:

1. Die Vorzeichen der Koeffizienten der ersten Glieder sind stets positiv, die der zweiten stets negativ.

2. Die Koeffizienten von p^{-2} sind, da α nur klein, in allen sechs Serien ungefähr gleich. Dies ist in den empirischen Formeln ebenfalls nahezu der Fall.

3. Die von p freien Glieder sind für die beiden Nebenserien nahezu gleich. Nur die kleine Größe α bringt einen Unterschied der Zahlenwerte dieser Koeffizienten zustande.

4. Die von p freien Glieder der Hauptserie sind größer als die entsprechenden Glieder der Nebenserien. Sie sind untereinander nach der Theorie genau gleich. Daß dies in den empirischen Formeln der Fall sein sollte, äußerte bereits Kayser l. c.

Die Koeffizienten der höheren Glieder zeigen, wie dies auch am ehesten zu erwarten ist, keine Übereinstimmung mit den theoretischen Formeln. Es mag dahingestellt bleiben, inwieweit der obige Ansatz durch passende Wahl der Konstanten und durch eventuelle Modifikation des Ansatzes (5) exakt mit der Erfahrung in Einklang zu bringen ist.

§ 7. Die Fundamentalgrößen a, r_0, r_1 des Natriumions mögen aus den Zahlenkoeffizienten der Gl. (15) bis (17) geschätzt werden. Man setze:

$$\frac{e^2}{hr_1}\left(1 + \frac{1}{1+\alpha}\right) = 3 \cdot 10^{10} \cdot 42000$$

$$\frac{e^2}{hr_1}\left(\frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\beta+\alpha}\right) = 3 \cdot 10^{10} \cdot 25000$$

$$\frac{e^2}{hr_1} \cdot \frac{2}{\beta} = 3 \cdot 10^{10} \cdot 110000\,.$$

1) Kayser, Spektroskopie, Bd. 2, S. 521 u. 522.

Diese Gleichungen werden angenähert erfüllt mit:

$$r_1 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ cm},$$

$$\frac{r_0}{r_1} = \beta = \frac{1}{3}, \quad \text{also } r_0 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm},$$

$$\frac{a}{r_1} = \alpha \text{ sehr klein } (\alpha < 10^{-8}). \quad r_0 \text{ und } r_1$$

sind also von der Größenordnung des Atomdurchmessers.

In ähnlicher Weise, wie die Spektren des Natriums und der Alkalien, kann man auch die Spektren der Erdalkalien zu erklären versuchen. Auch hier ist zunächst die Frage des Trägers der Spektren zu erörtern. Strontiumanodenstrahlen sind nach früheren Untersuchungen[1]) bewegte zweiwertige, positive Ionen. Die Spektra des Sr und der Erdalkalien zeigen nach Reichenheim[2]) außer einzelnen isolierten Linien eine Anzahl von Paaren, die von Runge und Paschen als Köpfe von Duplettserien angesprochen werden; Triplettserien wurden nur andeutungsweise beobachtet. Man wird hier zunächst mit der Hypothese durchzudringen versuchen, daß diese Spektren von zweifach geladenen, positiven Ionen ausgesandt werden. Das einfachste Modell eines solchen Ions besteht aus drei positiven Kernen und einem Elektron. Nimmt man entsprechend den in § 4 bei den Alkalien gemachten Voraussetzungen an, daß diesen drei positiven Kernen ein dreifaches Stufensystem von Isopotentialflächen für das Elektron entspricht, so sieht man sofort, daß sich u. a. auch Triplettserien ergeben. Die drei positiven Kerne der Erdalkalien wird man wieder in sehr kleinem Abstand voneinander voraussetzen.

§ 8. Versuche zu Berechnungen komplizierterer Spektren will ich hier übergehen, doch sei noch kurz erörtert, wie man die Annahme von starken, anziehenden Kräften vermeiden kann, die man zunächst geneigt ist, unter den positiven Kernen anzunehmen. Mir scheint hier die Ansicht eines Äthervakuums (vgl. § 1), um welches die positiven Kerne gruppiert sind, geeignet, an die Stelle der anziehenden Kräfte gesetzt zu werden; wenn zwischen den positiven Kernen kein Äther liegt, so werden auch keine starken elektrostatischen Abstoßungen resultieren können. — Auch die Stufenflächen des Elektrons könnte man sich dementsprechend als ringförmige, dünne Schalen aus Äthervakuum vorstellen; jede Serienlinie des Atoms würde dann durch radiale Schwingungen des Elektrons, senkrecht zur Stufenfläche, zu erklären sein. Andererseits ist es naheliegend, die Bandenlinien durch tangentiale Schwingungen des Elektrons erfolgend vorzustellen, also durch Schwingungen der Elektronen parallel zur Stufenfläche; eine solche Annahme würde erklären, daß die Bandenlinien keinen Zeemaneffekt zeigen, da die magnetischen Kraftlinien eines äußeren Magnetfeldes geschlossene Linien im Äther sind und demnach parallel einer Äthergrenzfläche laufen müssen, so daß sie die Schwingungsdauer eines parallel zur Stufenfläche schwingenden Elektrons nicht beeinflussen können.

Die Stufenflächen benachbarter Atome werden sich gegenseitig stören. Nimmt man an, daß bei Erhöhung des Gasdrucks die Stufenflächen etwas gequetscht und zusammengedrückt werden, so folgt sogleich, daß die Serienlinien durch Druck verschoben werden; für die Bandenlinien, welche nach der obigen Ansicht durch Elektronen erzeugt werden, die um eine Gleichgewichtslage parallel zur Stufenfläche schwingen, läßt dieses Modell, wie es der Erfahrung entspricht, keine Druckverschiebung ersichtlich werden.

Die Absorption einer Welle der beliebigen Schwingungszahl ν erfolgt in diesem Modell dadurch, daß ein Elektron, welches sich auf irgendeiner Stufenfläche befindet, erzwungene Schwingungen der Frequenz ν vollführt. Bei diesem Vorgang wird es dauernd Resonanzstrahlung emittieren. Wenn die Amplitude dieser Schwingungen so weit anwächst, daß ein gewisser Grenzwert $h \cdot \nu$ der Schwingungsenergie erreicht wird, so kann das Elektron seine alte Gleichgewichtslage, d. h. seine bisherige Stufenfläche, dauernd verlassen und auf höhere Stufen übergehen, wobei kinetische Energie verbraucht und potentielle gewonnen wird. In diesem Falle, wo eine hinreichend intensive Welle auffallen muß, kann also potentielle Energie in bestimmten Beträgen vom Atom aufgespeichert werden.

Dieses Bild der Lichtemission und -absorption soll, wie ich nochmals hervorheben möchte, ein Modell sein, d. h. eine anschauliche Konstruktion, welche eine große Zahl von Erfahrungstatsachen in sich widerspruchslos unter einen Hut bringt, und von den verschiedensten Vorgängen eine angenäherte Wiedergabe liefert. Ob dieses Modell die Naturvorgänge im leuchtenden Atom auch bei höheren Ansprüchen an die Exaktheit wiederzugeben imstande ist, wenn man es zweckentsprechend modifiziert, bedarf noch der Prüfung. Es sei besonders darauf hingewiesen, daß der obige Ansatz sehr variationsfähig ist und daß bereits die Gleichungen 1) bis 4), unabhängig von 5), die Haupteigenschaften der Alkali-Serien qualitativ erkennen lassen.

(Eingegangen 7. Januar 1914.)

1) E. Gehrcke u. O. Reichenheim, Ann. d. Phys. **25**, 881, 1908.
2) O. Reichenheim, Ann. d. Phys. **33**, 752, 1910.

Das Problem der Reichweite elektrischer Wellen.

Von K. E. F. Schmidt.

Bekanntlich hat Marconi im Jahre 1902 festgestellt, daß die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen auf große Entfernung zur Nacht mit wesentlich größerer Intensität erfolgt als bei Tage. Die Wiederholung der Versuche im Jahre 1905 ergab, daß die untere Grenze der Entfernung, bei der diese Beobachtung zu machen ist, ungefähr 250 km beträgt und daß das Intensitätsverhältnis der bei Nacht übertragenen Wellenenergie zu der bei Tage übermittelten etwa 5:2 ist. Fessenden hat dann später festgestellt, daß in den nördlichen Breiten bei Anwendung empfindlicher Apparaturen schon eine Entfernung von 160 km ausreicht, um einen wesentlichen Unterschied zwischen Tag und Nacht zu ergeben und daß diese Entfernung in den Tropen auf 80 km Abstand reduziert erscheint.

Die Weiterentwicklung in der Empfindlichkeit der Empfangseinrichtungen und besonders der Durchbildung objektiver Meßmethoden, wie ich sie auf meinen hier eingerichteten Stationen seit dem Jahre 1906 durchgeführt habe, hat es ermöglicht, die Entfernung noch erheblich weiter zu reduzieren. Im April 1906 konnte ich schon bei einem Abstand von 3,5 km zwischen Sender und Empfänger feststellen, daß die Empfangsenergie zur Nachtzeit gegenüber der am Tage erheblich größer[1]) war.

Ähnliche Versuche sind dann August 1909 zwischen dem gleichen Sender und einer frei im Felde liegenden, 8 km entfernten Empfangsstation durch die Herren Dr. Kaiser und Güldenpfennig wiederholt[2]). Aber diese Versuche ergaben kein positives Resultat. Erst den Herren Dr. Esau und Jaskowski gelang es im Dezember 1911 zwischen den gleichen Stationen unter Verwendung verbesserter Sende- und Empfangseinrichtungen mein Resultat von 1906 zu bestätigen. Es wurde festgestellt, daß der Empfang an vier Tagen des Dezember 1911 sich folgendermaßen gestaltete:

Die Zunahme der Wirkung im Empfänger in der Nacht gegenüber der am Tage stieg um

23 Proz.	am 5.	XII. 1911[3]).
32 „	„ 6.	
19 „	„ 7.	
34 „	„ 8.	

Der Grund für das negative Resultat der August-Versuche von 1909 konnte leider durch erneute Versuche nicht mehr verfolgt werden, da die Empfangsstation Mai 1912 durch einen Gewittersturm zum zweiten Male zerstört wurde. Meine Vermutung, daß im Sommer die Unterschiede zwischen Tag- und Nachtwirkung unmerklicher werden, scheint mir durch die Beobachtungen Moslers (Elektrotechn. Zeitschrift 1913, S. 997) unterstützt zu werden. Mosler findet für die Verhältnisse

$$\varepsilon = \frac{\text{Lautstärke bei Nacht}}{\text{Lautstärke am Tage}}$$

im Sommer Werte, die sich der 1 stark nähern; während das Verhältnis im April und Dezember nahezu 2 ist.

Natürlich ergaben sich auch zwischen dem 400 km entfernten Sender von Norddeich und der in der Nähe von Halle liegenden Empfangsstation wesentliche Differenzen im Tag- und Nachtempfang, die durch folgende Zahlen zum Ausdruck kommen:

Intensitätsverhältnis $\frac{\text{Nacht}}{\text{Tag}}$:[1])

		Barretter	Parallelohm-methode
1911 Oktober	8	—	3,4
	9	1,47	0,56
	10	1,45	2,36
	11	1,4	2,37
	12	1,5	1,32

Die letzte Kolonne dieser Tabelle gibt das Energieverhältnis der bei Nacht und Tag übermittelten Wellen an, wie es bei der üblichen Parallelohmmethode gefunden wurde. Man erkennt sofort die großen Unterschiede in den Angaben beider Methoden und auch die Fehlerquellen, welche bei der letzten Methode zum Ausdruck kommen. Ich bemerke, daß der Beobachter (Jaskowski) gut eingeschult war, so daß die Fehler der subjektiven Methode nicht dem Beobachter zur Last fallen. Diese Parallelbeobachtungen zwischen subjektiver und objektiver Methode sind angestellt, um ein Urteil zu gewinnen, in welchen Grenzen Fehler durch die Hörmethode in die Beobachtungen kommen können.

Diese Hörmethode ist bisher fast ausschließlich für derartige Versuche benutzt, z. B. auch von der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie, welche in höchst dankenswerter Weise eine Reihe von Versuchen durchgeführt hat, um an den verschiedenen Stellen der Erde über das Problem der Reichweiten Beobachtungsmaterial zu gewinnen.

Die Gesellschaft hat mir einiges Kurven-

1) Angenähert 20 Proz.

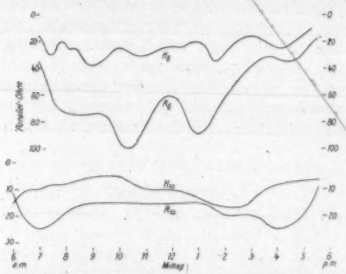
2) Mitteilungen der Physikalischen Versuchsstation Halle-Cröllwitz. No. 25, S. 396 (Tab. XII).

3) Ebenda, No. 33, S. 593 und 585 f.

1) l. c. Anm. 3, 1. Sp.

material zur Verfügung gestellt, was ich mit ihrer Erlaubnis hier veröffentliche[1]).

Die Kurvenbilder (Fig. 1) zeigen die Intensi-



Einfluß der Tageszeit (900 km freie See).

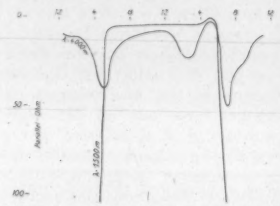
Fig. 1.

tätsschwankungen in einem Empfänger auf eine Entfernung von 900 km über freie See (Niederländisch-Indien, 5° südl. Breite) für die Wellenlänge von 1600 m.

Die Kurven H_6 und R_6 sind gewonnen am 6. Januar 1913, die Kurven H_{10} und R_{10} am 10. Januar 1913. H beim Gang der Wellen SSW—NNO, R im entgegengesetzten Sinne.

Es sind erhebliche Schwankungen zu verzeichnen, die sich an den beiden Tagen und den verschiedenen Tagesstunden sehr verschieden gestalten, auch tritt ein Einfluß der Strahlungsrichtung hervor.

Die Kurven (Fig. 2) zeigen die Schwankun-

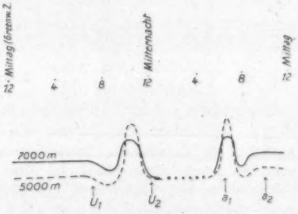


Einfluß der Tageszeit (1000 km Landweg).

Fig. 2.

gen der Empfangsintensität für einen 1000 km vom Sender entfernten Empfänger. Das Zwischengelände bestand aus Gebirge (bis zu 6000 m Höhe) und dichtem Wald. Während bei Tage die 1500-m-Welle nur äußerst geringe Wirkung ergab, überstieg sie in der Nacht die Wirkung der 4000-m-Welle ganz merklich; die Menge der Schwingungsenergie für die kurze Welle war 60 Proz. größer als die der langen. Beachtenswert sind die starken Abweichungen um die Zeit des Sonnen-Auf- und -Untergangs für die 4000-m-Welle.

Eine sehr systematische Beobachtungsreihe hat Marconi im Jahre 1911 durch Versuche zwischen Clifden und Glace-Bay gewonnen. Die im Electrician vom Juli 1911 veröffentlichten Resultate sind durch das Kurvenbild 3 gekennzeichnet, wobei besonders aufmerksam zu machen ist auf die starken Schwankungen zur Zeit des Sonnen-Auf- und -Untergangs.
U_1 Untergang, a_1 Aufgang in Irland,
U_2 Untergang, a_2 Aufgang in Nordamerika.



Einfluß der Tageszeit (Clifden-Glace-Bay).

Fig. 3.

Auffälligerweise zeigen diese Kurven teilweise viel bessere Energieübertragung am Tage als in der Nachtzeit und stehen damit im Gegensatz zu Marconis früheren Beobachtungen und den anderweitig gewonnenen Resultaten.

Marconi gibt an, daß während der Nacht über dem Atlantischen Ozean ganz erhebliche Schwankungen in der Strahlung auftreten, so daß die Intensität der aufgenommenen Energie zwischen extrem schwachen und starken Werten pendelte.

Auch die von Austin[1]) angestellten zahlreichen Versuche zwischen einer großen Landstation und zwei Schiffsstationen sind größtenteils mit der Hörmethode durchgeführt.

Seine Versuche haben für die 1000-m-Welle bei Nacht im allgemeinen größere Empfangs-Intensität als am Tage gegeben; nur an einigen Tagen war auch für diese Welle selbst bei Entfernungen von 900 bis 1800 km zwischen Sender und Empfänger kein Unterschied nachweisbar. Für die 3750-m-Welle war der Tagesempfang gleich dem bei Nacht.

Mit der Hörmethode hat auch Wildmann[2])

1) Obgleich das Material nur qualitative Anhaltspunkte gibt, so dürfte doch das Interesse eine Mitteilung an dieser Stelle rechtfertigen.

1) Austin, Jahrb. d. drahtlosen Telegr. u. Teleph. 5, 75, 1911.

2) Wildmann, S. Erskine-Murrays, Handbook of Wireless Telegraphy, S. 268.

Versuche in der Zeit vom 20. Oktober 1905 bis 20. Januar 1906 zwischen zwei ca. 200 km voneinander entfernten Stationen in Alaska angestellt. Aus seinen Versuchen folgert er eine Zunahme der Empfangswirkung mit Zunahme der Windgeschwindigkeit.

Ich finde, daß seine Beobachtungen fast ebenso oft das Gegenteil ergeben, da bei zunehmender Windgeschwindigkeit eine Abnahme der Empfangswirkung eintritt und umgekehrt. Dagegen deuten die Kurven auf eine Zunahme der Empfangsintensität im Laufe der Zeit von Oktober bis Januar hin; er findet bei der Hörmethode Oktober ca. 4000 Ω, November und Dezember 2000 Ω, im Januar 1000 Ω parallel zum Telephon.

Mosler (a. a. O.) findet bei der Energieübertragung Norddeich—Berlin (420 km) für den Wert $\varepsilon = \frac{\text{Lautstärke bei Nacht}}{\text{Lautstärke bei Tag}}$ folgende Werte: September $\varepsilon = 2{,}1$, Oktober 2,8, November 3,2, Dezember 1,8, Januar 1,6, also ein Maximum im November. Inwieweit solche Unterschiede durch atmosphärische und sonstige Verhältnisse begründet sind, entzieht sich einstweilen der Beurteilung. Da Mosler seine Messungen mit Detektor und Galvanometer anstellte, wobei der Detektor nach Möglichkeit gegen Temperatur-Änderungen und Erschütterungen geschützt wurde, so stellen diese Messungen einen Fortschritt dar. Wie weit allerdings die Indikationen des Detektors im Laufe des Beobachtungsjahrs wirklich konstant waren, ist nicht festgestellt.

Das Reichweitenproblem hat mich seit 1906 dauernd beschäftigt und ein großer Teil der auf der hiesigen Station für elektrische Schwingungen durchgeführten Arbeiten ist mit der Absicht angefertigt, die Grundlagen und Methoden kennen zu lernen, welche zur Durchführung einer systematischen Arbeit im großen Stil — denn nur so kann das Problem der Reichweiten mit Aussicht auf Erfolg in Angriff genommen werden — erforderlich sind. Das Resultat dieser Arbeiten kann kurz dahin zusammengefaßt werden: Es sind augenblicklich die Methoden für die Beobachtungen vollständig sicher gestellt und alle Vorbedingungen erfüllt, um das Problem der Reichweiten mit Erfolg experimentell in Angriff zu nehmen.

Da die Möglichkeit einer Durchführung der Arbeit jetzt in greifbare Nähe gerückt ist, möchte ich in folgendem die auf meinen Stationen gewonnenen Erfahrungen und sich daran knüpfende Vorschläge, welche für das Problem von Interesse sind, mitteilen.

Erforderlich für die Bearbeitung des Problems ist 1. eine große Sendestation, welche genügend Energie ausstrahlt, um wenn möglich auf 2000 km noch objektiv meßbare Empfangswirkungen zu geben; 2. eine Normal-Empfangsstation in etwa 10 km Entfernung vom Sender; 3. ein Netz von Empfangsstationen, welche möglichst nach den vier Himmelsrichtungen gegen den Sender orientiert und in Abständen von ca. 500, 1000, 1500 und 2000 km von dem Sender entfernt sind.

Einrichtung der Stationen.

1. Sendestation.

Auf Grund der hier in Halle-Cröllwitz durch lange Versuchsreihen gewonnenen Erfahrungen würde eine Sendestation, welche nach dem Muster der zu Norddeich bestehenden gebaut ist, durchaus ausreichen. Die Größe der Sendeenergie von Norddeich ist völlig genügend. Ich habe hier in 400 km Entfernung in doppelt gekoppeltem Empfangssystem bei außerordentlich loser Koppelung und unter Benutzung einer Schirm-Antenne von 29 m Spitzenhöhe, gebildet aus 12 etwa 40 m langen Drahtlitzen und unter Benutzung eines gleichgroßen Gegengewichts mit dem Barretter in Verbindung mit einem Deprez-d'Arsonval-Galvanometer mittlerer Empfindlichkeit so große Ausschläge gehabt, daß quantitative Messungen mit ähnlich gebauten Empfangseinrichtungen noch weit über 1000 km gewährleistet werden können. Diese große ausgestrahlte Energie kann ferner nach den hier gemachten Beobachtungen mit einer sehr hohen Konstanz ausgestrahlt werden. Der in Norddeich benutzte Löschfunke ist bei sorgfältiger Wartung der Funkenstrecke so gut, daß selbst bei Galvanometer-Ausschlägen von 500 mm während 20 Skd. Schwankungen von nur $^1/_5$ bis $^2/_5$ sc. beobachtet wurden. Die Konstanz der ausgestrahlten Energie kann ebenfalls unter Verwendung geeigneter Kopplungseinrichtungen und umsichtiger Benutzung der Sendevorrichtung auf einen außerordentlich hohen Grad gebracht werden, wie folgende im Oktober 1913 hier gemachten Beobachtungen ergeben[1]) haben.

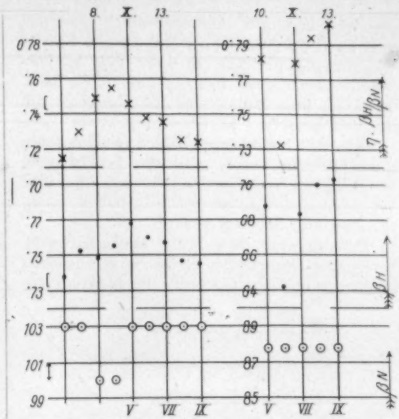
Von Norddeich wurden Strichsignale von etwa 1 Min. Dauer mit darauffolgender Pause von gleicher Länge ausgegeben. In Halle-Cröllwitz wurden mit einem an die Schirmantenne lose gekoppelten Meßkreise die Wirkungen aufgenommen und mit dem Barretter gemessen.

1) Es sind offenbar auch in der Atmosphäre außerordentlich konstante Zustände gewesen, da sonst eine solch gleichmäßige Energieübertragung nicht stattgefunden hätte.

Hiermit ist gezeigt, daß wir heute in der Lage sind, die erste Hauptbedingung für die Bearbeitung des Problems zu erfüllen: Die Einrichtung einer Sendestation, welche genügend große Energie mit hinreichender Konstanz ausstrahlt.

Über die definitive Durchbildung einer Meßeinrichtung für Großstationen zur Kontrolle der Konstanz der ausgestrahlten Energie sind augenblicklich Versuche im Gange; diese werden zeigen, ob sich ähnliche Einrichtungen, wie ich sie für die Messungen von etwa 2 bis 4 Kilowatt Schwingungsenergie, bei der sich die Verwendung eines Thermoelements mit Benutzung entsprechender Meßkreise sehr gut bewährt hat, empfehlen werden.

Die am 8. Oktober 1913 gewonnenen Werte sind in Tab. I zu finden und in Fig. 4 graphisch dargestellt. Faßt man die 9 Werte in Gruppen zusammen, so gibt die letzte eine max. Abweichung vom Mittel von 1,6 Proz. Während dieses 10 Min. dauernden Versuchs waren die



Strahlungsversuche Norddeich—Halle.

Fig. 4.

Tabelle I.

Versuche zwischen Norddeich und Halle[1]) vom 8., 10. und 11. Oktober 1913. Wellenlänge = 1650 m. (Beobachter in Halle Herr Jenrich.) Zeit 10^h bis $10^h\,27^m$ früh.

8. Oktober 1913.

	Norddeich	Halle	$\eta = \beta_H/\beta_N$	Mittel
1.	$\beta_n = 103$	$\beta_H = 73{,}7$	0,715	0,722
	103	75,2	730	
3.	100	74,9	749	0,752
	100	75,5	755	
5.	103	76,8	746	
	103	76,0	738	
7.	103	75,7	735	$0{,}734 + \frac{0{,}012}{0{,}01}$ $\quad \Delta = 1{,}6$ Proz [2])
	103	74,7	725	
9.	103	74,6	724	

10. Oktober 1913.

1.	$\beta_n = 96{,}9$	$\beta_H = 74{,}1$	$\eta = 0{,}765$	
	93,8	70,6	753	
3.	90,7	71,1	784	0,778
	90,7	70,0	772	
5.	87,7	68,1	782	
	87,7	64,2	732	
7.	87,7	68,3	779	$0{,}778 + \Delta = \frac{3{,}1}{5{,}9}$ Proz.
	87,7	69,9	794	
9.	87,7	70,3	802	

11. Oktober 1913.

1.	$\beta_n = 103$	$\beta_H = 97{,}8$	$\eta = 0{,}949$	0,935
	103	94,9	921	
3.	100	90,5	905	
	96,9	87,4	902	
5.	93,8	84,6	902	0,895
	93,8	83,3	888	
7.	90,7	81,8	902	0,897
	90,7	81,0	893	
9.	87,7	81,0	924	0,922
	87,7	80,7	920	

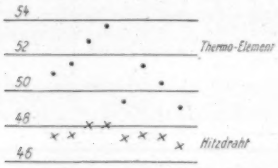
1) Die Norddeicher und Hallenser Zahlenwerte sind Relativzahlen in einer zu i^2 proportionalen Skala. Sie sind daher indirekt in Beziehung zu setzen, wie das in dem Wert η geschehen ist.

2) Δ = Abweichung vom Mittel.

Sendebedingungen außerordentlich konstant und auch der Zustand der Atmosphäre ist sehr gleichmäßig gewesen, da sonst eine so konstante Übertragung nicht stattgefunden hätte. Merklich inkonstanter sind die Vorgänge am 10. und besonders 11. Oktober gewesen.

Aus den Norddeicher Zahlen (Relativwerte) geht übrigens hervor, daß die Sendetechnik so vollkommen geworden ist, daß die dort verwendeten Instrumente nicht mehr fein genug für genauere Messungen sind.

Daß sich auf diese Weise leicht nachweisbare Schwankungen der Beobachtung entziehen können, zeigt Fig. 5, welche die Meßresultate



Sendeenergie, aufgenommen mit Hitzdraht und Thermoelement.

Fig. 5.

zweier verschiedener Indikatoren für die Energie der Antenne gibt; während das Hitzdrahtinstrument ca. 2 Proz. Schwankungen im Max. zeigt, gibt das Thermoelement ca. 12 Proz. für die gleichen Zustände an.

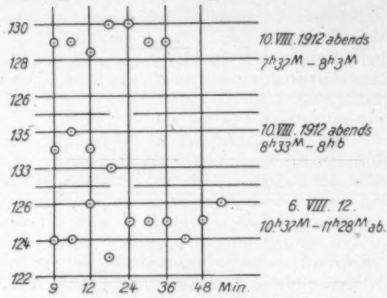
In meinem Laboratorium hat sich bei den zahlreichen über lange Zeiten ausgedehnten exakten Messungen über die Konstanz der Stoßerregung ergeben, daß die Zustände labil sind; besonders ändern die durch die Atmosphäre herbeigeführten Variationen in den Konstanten der Antenne[1]) das Optimum der Koppelung für die Stoßerregung. Man kann durch entsprechende Vorrichtungen die Konstanz der Emission wesentlich bessern, worüber augenblicklich weitere Untersuchungen hier ausgeführt werden.

Was man bei guten atmosphärischen Verhältnissen erhält, läßt die Fig. 6 erkennen; selbst bei 30 Min. durchlaufenden Löschfunken betragen die Schwankungen wenig über 1 Proz.

2. Normal-Empfangsstation.

Da gleichzeitig auch die Strahlungsenergie durch Messung dauernd verfolgt werden muß, so ist die Aufstellung einer Empfangsstation in etwa 10 km Entfernung vom Sender nötig.

1) Siehe darüber Esau, diese Zeitschr. 13, 721, 1912 und Mitteilungen der Grollwitzer Versuchsstation, No. 34.



Konstanz der Energie durchlaufender Löschfunken.

Fig. 6.

Auf die Messungen dieser Station als Einheit sind die Messungen der sämtlichen übrigen Stationen zu reduzieren, weshalb sie als Normalstation bezeichnet werden mag. Da die hier ankommenden Energiemengen noch groß genug sind, um mit dem Thermoelement gemessen zu werden, so hat man auch ein bequemes Mittel in der Hand, um die ausgestrahlte Energiemenge direkt in absoluten Zahlen anzugeben. Allerdings sind auch schon auf diese Entfernungen hin Einflüsse der Atmosphäre auf die ausgestrahlte Energie nachzuweisen (s. oben), aber man muß zur Messung der Strahlungsenergie verlangen, daß das Empfangssystem hinreichend weit vom Sender absteht, was für eine Welle von etwa 1600 bis 2000 m die obige Entfernung ergibt. Von dem großen Nutzen und der Notwendigkeit einer solchen Normalstation habe ich mich hier durch einige Versuchsreihen überzeugen können.

3. Empfangsstationen.

Die eben genannte Normal-Empfangsstation würde nach dem Typ der übrigen Empfangsstationen zu bauen sein. Für die Zahl und Größe dieser Stationen werden die Mittel maßgebend sein, welche für die definitive Durchführung des Arbeitsplanes zur Verfügung stehen.

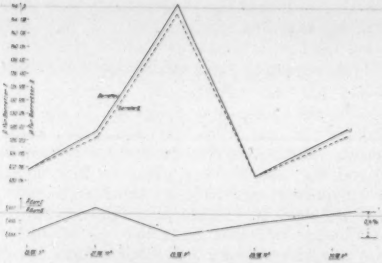
Von den verschiedenen Antennenformen wird für diese Versuche am meisten die Schirm-Antenne zu empfehlen sein. Wegen der kompendiösen Zusammendrängung der Leiterteile beansprucht diese am wenigsten Platz und ermöglicht, die schädlichen Einflüsse der Erde auf die Konstanten der Antenne wohl am vollkommensten auf das Minimum herabzudrücken. Wegen der großen Veränderlichkeit, welche die Erde infolge der Verschiedenheit der Feuch-

tigkeit und der Beschaffenheit des Bodens an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche zeigt, wird die Anwendung eines Gegengewichts nicht zu umgehen sein, und um dieses den Einflüssen der Erde nach Möglichkeit zu entziehen, muß es mindestens 4 m über den Boden ausgespannt werden[1]); ein Sinken des Gegengewichts unter diese Höhen ergab selbst bei Porphyrfels als Untergrund eine merkliche Vermehrung der Dämpfung Λ · ($h = 4$ m, $\Lambda = 0{,}093$, $h = 0 : \Lambda = 0{,}109$).

Hochempfindliche Meßeinrichtungen.

Über hochempfindliche Indikatoren zu quantitativen Messungen schneller elektrischer Wellen ist in meinem Laboratorium eine große Zahl von Versuchen angestellt. Zur Untersuchung gelangt sind das Thermoelement der Barretter und Kontaktdetektoren verschiedener Konstruktion.

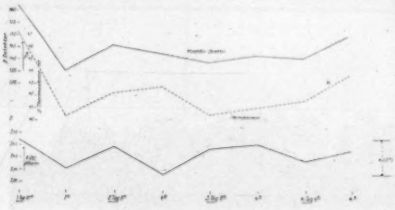
Die größte Empfindlichkeit zeigen nach den hier gemachten Beobachtungen die Kontaktdetektoren. Ihnen sehr nahe stehen die Barretter in der von mir verbesserten Anordnung, wogegen die Thermoelemente eine ungefähr hundertmal kleinere Empfindlichkeit besitzen. Betreffs der Konstanz der Angaben, die selbstverständlich in höchster Vollkommenheit gefordert werden muß, hat der Barretter die besten Erfolge geliefert[2]). Der Vergleich zweier Barretter ergab, daß das Verhältnis der von beiden angezeigten Schwingungsenergie innerhalb 4 Tagen im Maximum nur bis zu 0,4 Proz. schwankte (s. Fig. 7), wobei



Zur Konstanz der Barretter.

Fig. 7.

aber die zugeführten Energiebeträge im Maximum um 20 Proz. verschieden waren. Der Vergleich eines Molybdändetektors mit einem Thermoelement ergab in 4 Tagen Maximalschwankungen für das Verhältnis der Angaben von 4,25 Proz. (Fig. 8).



Zur Konstanz der Detektoren.

Fig. 8.

Zweckmäßig wird es natürlich stets sein, eine einfache und sichere Methode zu schaffen, um die Indikatoren jederzeit an Ort und Stelle betreffs ihrer Konstanz zu prüfen.

Die Schnelligkeit, mit welcher die definitive Einstellung einer Meßeinrichtung erreicht wird, hängt in erster Linie von dem benutzten Galvanometer ab. Das für die meisten Versuche hier benutzte System der Firma Siemens & Halske (Deprez-d'Arsonval 30 Ohm System — Widerstand) erfordert etwa 5—6 Skd. Das empfindlichere (System — Widerstand = 150 Ω) etwa 40 Skd. Diese Frage ist sehr wichtig, da das System des Empfangsindikators der Länge der von dem Sender abgegebenen Strichsignale angepaßt sein muß. Auch hierin hat die Norddeicher Station hohe Leistungsfähigkeit erwiesen, indem es möglich war, Striche von 1 Minute Dauer bei außerordentlicher Konstanz zu geben (s. oben).

In jüngster Zeit haben wir mit einem neuen Typ der Firma gearbeitet, das nur ca. 1.5 sec Schwingungsdauer besitzt, so daß die Länge der Strichsignale ganz wesentlich herabgedrückt werden kann. Die Empfindlichkeit der Empfangsanordnung mit dem Barretter ist durch dies neue Instrument etwa verdoppelt gegenüber dem 150 Ohm-Instrument.

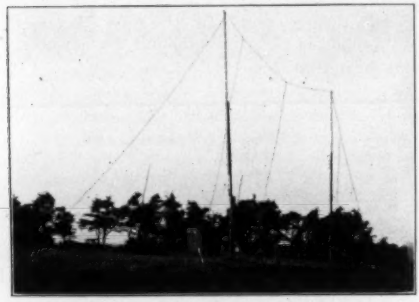
Empfangsapparaturen.

Die für den Empfang notwendigen Apparaturen habe ich in kleinen Holzbuden von $2\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$ qm Bodenfläche[1]) und $2\frac{1}{2}$ m innerer Höhe untergebracht; völlig mit Dachpappe umkleidet und mit einem kleinen Ofen ausgerüstet, bieten sie behaglichen Schutz bei längerem Aufenthalt auch in winterlichem Unwetter. Die Anordnung eines doppelt gekoppelten Meß-

1) Mitteilungen der Physik. Versuchsstation Halle-Cröllwitz, No. 17 (Heinecke).

2) Mitteilungen des Laboratoriums für Theoretische Physik Halle, No. 10 (Kleine).

1) Diese Fläche würde zweckmäßig noch etwas vergrößert.



Empfangsbude aus Holz für Feldstationen.

Fig. 9.

kreises zeigt Fig. 10 im Grundriß. Die Abstimm- und Kopplungsspulen bestehen in meinem System aus Drahtringen von 25 cm Durchmesser und der verwendete Draht hat 2,8 mm Dicke. Diese Spulen sind auf einem Holzschlitten leicht verschiebbar angeordnet. Eine Skala erlaubt die Schlittenstellung und Verschiebung abzulesen. Jede Spule hat eine größte Selbstinduktion (L) von 50000 cm, und die Selbstinduktion kann durch Abgreifen bequem in sehr feine Stufen verkleinert werden; durch Ankopplung einer zweiten gleichen Spule kann der L-Wert durch Gegen- und Reihenschaltung sowie Abstandsänderung von 14000 cm auf 140000 cm leicht und sicher geändert werden[1]). Für eine möglichst störungsfreie Aufstellung habe ich die Anordnung der Fig. 10 gewählt, die sich bewährt hat. Die Spulen L_{a1} und L_{a2} sind so in die Antennen eingeschaltet, daß sie sich in der Mitte des Strombauches befinden. L_{b1} koppelt den aus den Spulen L_{b2}, L_{b3}, L_{b4} und dem Drehkondensator C_2 bestehenden Meßkreis an. Der Indikator (für meine Versuche bisher stets ein Barretter) liegt in dem aus Spule L_{c1}, L_{c2} und dem Drehkondensator C_3 bestehenden Kreise und ist durch das Spulenpaar L_{b4} und L_{c1} an den Schwingungskreis gekoppelt. Die Gesamteinrichtung einer kleinen, frei im Felde liegenden Empfangsstation zeigt das Bild Fig. 9.

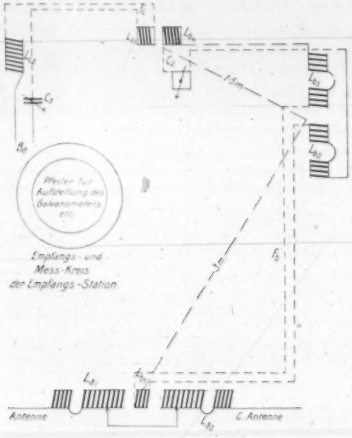


Fig. 10.

1) Mitteilungen der Versuchsstation, No. 19 (Kempe).

Die Galvanometer und die für die späteren Versuche zu benutzende Registriervorrichtung werden zweckmäßig auf einem schweren Sockel aus Mauerwerk aufgestellt, das unter der Erde eine kleine Kammer zur Aufnahme des Indikators enthält. Auf diese Weise ist dieser gegen schnelle äußere Temperaturwechsel geschützt und eine gute Nullage des Indikator-Galvanometers gewährleistet.

Will man den Zwischenkreis vermeiden, so kann durch direkte Verbindung von L_{b1} mit dem Indikatorkreis und durch Verstimmen der Antenne eine Änderung der Induktion L_a eine Resonanzkurve gewonnen werden.

Über die zweckmäßigste Anordnung dieser Meßkreise ist ein definitives Urteil noch nicht zu fällen; es sind darüber verschiedentlich theoretische Arbeiten veröffentlicht. Die Theorie führt zu ganz unübersichtlichen Formeln, so daß zweifellos eine experimentelle Klärung dringend nötig ist. Derartige Arbeiten sind in meinem Laboratorium augenblicklich in Ausführung begriffen.

Die Wichtigkeit des hier besprochenen Problems hat die kartellierten deutschen Akademien veranlaßt, diese Frage mit in das Programm für die Arbeit der von ihnen eingesetzten „Studienkommission für luftelektrische Forschung" aufzunehmen. Auf der Münchener Versammlung 1912 habe ich darüber referiert, das Problem ist eingehend diskutiert worden und in den Berichten Nr. 4 und 5[1]) behandelt. Auf Veranlassung der Kommission hatte ich es übernommen, weitere Schritte zu tun, um besonders zu versuchen, eine Großstation für die Durchführung der Aufgabe zu gewinnen. Da aber keine der in Betracht kommenden großen deutschen Sendestationen wegen Über-

1) Sitzungsber. der Kgl. Bayersch. Akad. d. Wissensch., math.-physik. Klasse, No. 4 (Simon); No. 5 (K. E. F. Schmidt, Verwendbarkeit des Barretters für die Untersuchung des Einflusses der luftelektrischen Zustände auf die Strahlung elektrischer Wellen).

häufung mit laufenden Arbeiten in der Lage war, eine regelmäßige, über längere Stunden des Tages durchgeführte Sendung elektrischer Wellen einzurichten, blieben meine Bemühungen zunächst erfolglos.

Gelegentlich der im Oktober 1912 zu Paris stattgefundenen Conférence Internationale de l'Heure bot sich mir Gelegenheit, Herrn Dr. Rob. Goldschmidt-Brüssel für das Problem zu interessieren. Er hat sich in dankenswerter Weise bereit erklärt, die von ihm erbaute große Station Brüssel-Laeken der Sache dienstbar zu machen und hat für die Vorarbeiten eine namhafte Summe zur Verfügung gestellt.

Im Oktober dieses Jahres hat in Brüssel eine Besprechung stattgefunden, an der eine Reihe von Gelehrten verschiedener Länder teilgenommen haben und es ist ein Programm für die Vorarbeiten aufgestellt, über das ich mit dem Kollegen Max Wien gemeinsam in dem Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie berichten werde.

Halle a. S., Versuchsstation, Dezember 1913.

(Eingegangen 15. Januar 1914.)

Über ein direkt ablesbares und direkt anzeigendes Elektrometer zur Messung sehr schwacher Ströme.

(Sur un électromètre à lectures et à indications directes destiné à la mesure de très faibles courants.)

Von B. Szilard.

Schon seit mehreren Jahren[1]) verfolge ich das Ziel, ein Elektrometer zur Messung sehr schwacher Ströme zu konstruieren, und zwar ein Elektrometer, das ohne Vorbereitung und ohne optische oder mikroskopische Ablesevorrichtung, ohne vorherige Justierung, Berechnung oder Eichung für jede beliebige Messung dienen könne, gerade wie beispielsweise ein gewöhnliches Amperemeter mit seinem festen Zeiger und seiner feststehenden gravierten Teilung zur Messung einer Stromstärke dient.

Die große Schwierigkeit bei der Verwirklichung eines derartigen Apparates liegt offenbar in dem Umstande, daß die dabei mitspielenden Kräfte äußerst schwach (mindestens 10^6 mal so schwach wie die in den empfindlichsten Zeigerinstrumenten angewandten) sind, um einen starren Zeiger von einer gewissen Länge zu verschieben.

Um zum Ziele zu gelangen, mußte ich es dahin bringen,

1. eine konstante Gegenkraft zu haben;
2. die elektrische Kapazität so viel wie möglich zu verringern;
3. möglichst große Zeigerverschiebungen bei schwacher statischer Einwirkung zu erlangen;
4. das Gewicht der beweglichen Organe möglichst zu verringern;
5. zu ermöglichen, daß sich der Zeiger in unmittelbarer Nähe einer feststehenden Skala bewegt.

Was das Meßsystem anlangt, so bin ich bei einem um eine Achse drehbaren System stehen geblieben. Diese Systeme haben die größte Empfindlichkeit. Um eine möglichst geringe Kapazität zu haben, habe ich nur ein einziges feststehendes Kreisstück (ein einziges Quadrantenelement, einen Monanten) als alleinigen Träger der elektrischen Ladung benutzt, während der ganze bewegliche Teil dauernd zur Erde abgeleitet ist und niemals eine Ladung trägt.

Als Gegenkraft benutze ich die Biegung einer sehr feinen Spirale, eine Kraft, die viel konstanter und zuverlässiger ist als die Torsion eines Fadens, und die als Organ jedenfalls praktischer zu handhaben ist, weil sie viel weniger Raum einnimmt.

Durch fortgesetzte Verminderung des Gewichts der Organe habe ich eine Bewegung mit Achse (deren Gewicht nur 0,062 g beträgt) und Zapfen verwirklichen können.

Beschreibung.

Der Apparat enthält nur einen einzigen „Quadranten" (Fig. 1 und 2). Dieser besteht

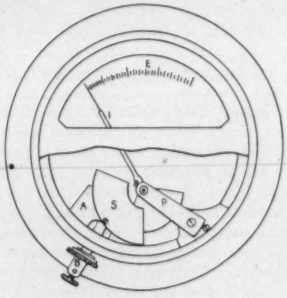


Fig. 1.

aus einem Paare sorgfältig isolierter Sektoren *S*. Eine Brücke *PP* hält die kleine Achse *X* zwischen zwei Rubinen. Diese Achse trägt in der Mitte eine Nadel *I* von ungefähr 55 mm

1) C. R. Nov. 1909, März und November 1913.

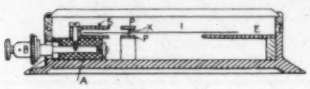


Fig. 2.

Gesamtlänge, deren einer Flügel kreisförmig ist, während der andere gerade und zugespitzt ist. Eine auf der Achse X befestigte flache Spirale dient als Gegenkräftepaar. In der Ruhelage ist die Nadel nur leicht zwischen die beiden Sektoren des Quadranten gezogen. Diese Sektoren sind aus gehärtetem und magnetisiertem Stahl und bilden gleichzeitig das Dämpfungssystem. Außer diesen Sektoren ist dagegen keinerlei Organ des Apparats aus magnetischem Material hergestellt.

Die Montierung.

Die Nadel, das geladene System und die Isolierung sind zusammen in ein sehr flaches Metallgehäuse eingeschlossen, und aus dem Gehäuse ragt nur durch eine in der Wandung des Apparats vorgesehene Öffnung ein mit dem Sektor elektrisch verbundener Stift hervor. Die Isolierung A ist so angebracht, daß es unmöglich ist, sie zu berühren; sie ist nicht einmal von außen sichtbar, so daß sie gegen jede Beschädigung durch Feuchtigkeit, Staub oder Licht geschützt ist. Der mit den Sektoren S verbundene Stift B, der aus dem Gehäuse herausragt, trägt eine kleine aufschiebbare Metallkappe, welche gestattet, den Apparat zu schließen, wenn man ihn nicht gebraucht, und somit das Innere vollkommen zu schützen, während er gleichzeitig den Sektor mit dem Gehäuse verbindet. Der Stift B trägt außerdem an seinem Ende eine kleine Klemme, die dazu dient, den von der Elektrizitätsquelle kommenden Leitungsdraht zu befestigen.

Die Metallplatte, welche den Mechanismus von oben deckt, bietet den erforderlichen elektrostatischen Schutz. Eine am Gehäuse befestigte kleine Klemme gestattet, das Gehäuse zu erden. Die Nadel bewegt sich auf einer feststehenden kreisförmigen Skala E, und zwar in deren unmittelbarer Nähe, und zeigt als Ablesesystem genau dasselbe Aussehen wie ein gewöhnliches Voltmeter. Die Abmessungen des Apparats sind auf einen Durchmesser von 10 cm und eine Höhe von 2,5 cm herabgedrückt.

In dieser Montierung ist der Apparat ebenso widerstandsfähig wie ein gewöhnliches Amperemeter. Da seine Nadel überaus leicht ist, erfordert sie nicht einmal eine Arretierung, und da sie keine Ladung trägt, kann sie nicht durch einen falschen Handgriff in Unordnung geraten.

Empfindlichkeit.

Der Apparat hat zwar stets denselben Bau, wird aber für verschiedene Empfindlichkeiten hergestellt. Das gangbare Modell hat eine mittlere Kapazität von 6 elektrostatischen Einheiten und einen Skalenbereich von 100 bis 300 Volt (die Voltzahlen sind von Volt zu Volt gleich in das Zifferblatt eingraviert); das entspricht 90°. (Andere Modelle, die von diesem nur durch die Kraft der Spirale verschieden sind, haben einen Skalenbereich von 200 bis 500 Volt bzw. von 300 bis 1000 Volt.) Schaltet man zwischen die Klemme B und die zu messende Elektrizitätsquelle einen Luftkondensator ein, so kann man durchaus beliebige Spannungen, z. B. 500, 1000, 10000, 50000 Volt und darüber, messen.

In dem zur Messung schwacher Spannungen (bis zu 300 Volt) bestimmten Modell ist die Nadel vollkommen gedämpft. Der Apparat gestattet, Spannungen mit einer Genauigkeit von 1 v. H. zu messen.

Die Nadel ist so vollkommen ausbalanciert, daß ein und derselbe Apparat in allen Lagen, horizontal oder vertikal, arbeiten kann, ohne daß sich seine Angaben ändern.

Ein eigenartiger Beweis hierfür besteht darin, daß man den Apparat mit einem Stück Siegellack lädt und ihn dann um seine horizontale und darauf um seine vertikale Achse dreht; die Nadel behält ihre Stellung bei jeder Neigung des Apparats bei.

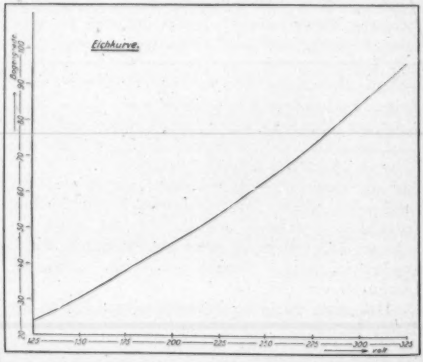


Fig. 3.

Die hier mitgeteilte Kurve gibt den Gang der Ausschläge in Volt als Funktion der Bogengrade wieder (s. Fig. 3).

Da die Skala feststeht und da man die Kapazität des Instruments kennt, so kann man nötigenfalls leicht die Spannungsangaben in Angaben der Elektrizitätsmenge umwandeln.

Anwendungsgebiet.

Dieser Apparat ersetzt sehr vorteilhaft gleichzeitig das Elektroskop und das statische Voltmeter in allen ihren Verwendungsarten, sowie in vielen Fällen das Elektrometer; ferner kann es dank seiner Empfindlichkeit für alle Beobachtungen über atmosphärische Elektrizität und über Ionisierungsströme, für Messungen schwacher Leitfähigkeit, für Kapazitätsmessungen und dergleichen, zur Messung schwacher Ströme überhaupt, sowie zu allen Spannungsmessungen bei beliebigen Strömen dienen. Er hat mir u. a. die von der Reibung der Isolatoren herrührende Ladung zu bestimmen gestattet.

Dank seiner bequemen Ablesung und seiner Widerstandsfähigkeit kann man ihn unter ungünstigen Verhältnissen anwenden, wo die Messung mit Hilfe anderer Apparate unmöglich sein würde.

Paris, Laboratoire de Recherches Radioactives, 10. Januar 1914.

(Nach dem Manuskript aus dem Französischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 14. Januar 1914.)

Elektrisch erregte Bewegungserscheinungen in Flüssigkeitslamellen.

Von S. Mikola.

In folgendem werden gewisse Bewegungserscheinungen kurz[1]) beschrieben, die unter der Wirkung eines äußeren Kraftfeldes besonders ausgeprägt in Seifenlamellen, aber auch in dickeren Flüssigkeitsschichten entstehen, wenn diese einen elektrischen Strom tragen. Die Erscheinungen haben viele Ähnlichkeit mit der elektrischen Endosmose und können als eine Verallgemeinerung dieser angesehen werden. Die Erklärung wird auch ähnlicherweise gegeben.

Zu den Versuchen werden Rahmen benutzt aus isolierender Substanz mit zwei Elektroden und ein kleines Stativ, so geformt, daß es auch den elektrischen Strom zuführt. Senkrecht gegenüber der Seifenlamelle werden verschiedene kleine Körper gestellt, welche der Kürze wegen Sonden genannt werden. Die einfachste Sonde stellt man her, indem man einen 2 bis 3 mm dicken und 15—20 cm langen Draht auf eine Siegellackstange befestigt. Die Seifenlösung wurde nach Vorschrift von Weinhold (Phys. Demonstrationen, 5. A., S. 182) bereitet.

Zum Versuche werden die Elektroden der Seifenlamelle unter Zwischenschaltung eines Kommutators mit den Klemmen der Stromquelle (Hochspannungsbatterie, Gleichstromzentrale) verbunden und der Apparat wird so aufgestellt, daß die Seifenlamelle das Licht des Himmels oder einer Mattglasscheibe, hinter der eine Lichtquelle aufgestellt ist, reflektiere. Wenn man den Strom schließt und die elektrisch geladene Sonde der Lamelle nähert, so sieht man in reflektiertem Lichte die hier beschriebenen Bewegungserscheinungen. Man kann auch die Erscheinungen einem größeren Publikum projizieren.

Die Bewegung der Flüssigkeit geschieht meistens in interessanten Doppelwirbeln (einige Phasen sind in Fig. 1—4 abgebildet). In der Jugendzeit der Lamelle sieht man noch keine Interferenzfarben, die Wirbelbewegung wird nur wegen der Schlieren sichtbar. Später wird die Lamelle immer dünner und dünner, die Interferenzfarben erscheinen. Wird die Lamelle ganz alt ($^1/_4$—1 Stunde), so verschwinden aus der Wirbelbewegung die Schlieren ganz und das Bild wird nur von Farbendifferenzen gebildet. Sehr oft kommt es vor, daß die beiden Hälften des Doppelwirbels in Komplementärfarben glänzen (Fig. 4, die linke Hälfte war blau und die rechte gelb).

In dem mittleren Teil des Wirbels ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen am größten. Wird die Elektrodenspannung erhöht, so wächst auch die Geschwindigkeit und Größe des Wirbels. Dasselbe geschieht bei der Erhöhung des Potentials an der Sonde. Wird der Strom kommutiert, so springt auch die Richtung des Wirbels in das Entgegengesetzte über. Dasselbe geschieht, wenn die Richtung des äußeren Kraftfeldes gewechselt wird.

Besonders interessant ist das Spiel der Wirbel, erzeugt durch Influenzelektrizität beider Art. Nähert man einen elektrischen Körper der Sonde, so erzeugt die gleichnamige Influenzelektrizität in der gegenüberliegenden Lamelle Wirbel schon aus Entfernung von mehreren Metern. Verwendet man Sonden mit einerseits runden, andrerseits spitzen Enden, so verraten sich alle Fälle der Saugwirkung.

1) Ein ausführlicher Bericht erscheint in ungarischer Sprache in Mathematikai és Physikai Lapok.

Es muß bemerkt werden, daß die Wirbel auch dann auftreten, wenn die Sonde keine elektrische Ladung besitzt, besonders aber, wenn sie in leitender Verbindung steht mit der Erde.

Zur Ermittlung der Rolle, welche die Luft möglicherweise spielen könnte, wurde die Lamelle unter die Glocke einer Luftpumpe gebracht, Spannung und Feld von außen zugeführt, bis 15 mm Vakuum ausgepumpt; aber die Erscheinung verlief ebenso, wie in lufterfülltem Raum. Die Versuchsanordnung wurde auch sonst mannigfaltig geändert, aber die Wirbel entwickelten sich immer in einer oder anderer Form. Die Erscheinung ist nicht

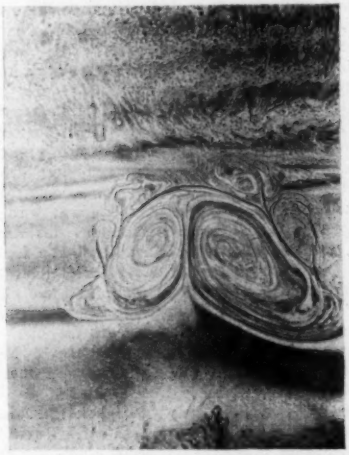


Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 2.

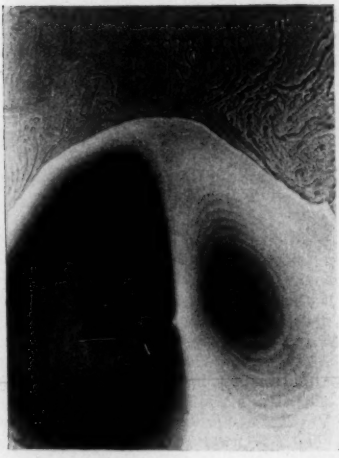


Fig. 4.

auf dünne Seifenlamellen beschränkt, man kann sie auch in dickeren Flüssigkeitsschichten hervorrufen.

Es handelt sich nun darum, ob man alle diese Flüssigkeitsbewegungen ohne irgendwelche Theorie in einem erfahrungsmäßigen Gesetz ausdrücken kann. Alle diesbezüglichen Erfahrungen deuten darauf hin, daß man als eigentliche Quelle des Wirbels eine kleine Fläche in der Mitte des geradlinigen Teiles ansehen muß. Hier hat die treibende Kraft den Sitz, welche der Flüssigkeit eine gewisse Bewegungsgröße erteilt. Daß sich aus dieser geradlinigen Bewegung ein Wirbel entfaltet, das hat nichts mit elektrischer Erscheinung zu tun, das folgt ganz einfach aus mechanischen Kräften, welche in der Lamelle walten. Wir müssen also unser Augenmerk nur auf diese kleine Fläche richten, welche wir Wirbelquelle nennen wollen. Diese liegt in dem der Sonde nächstliegenden Teil der Lamelle. Wir brauchen also nur die geradlinige Bewegung in der Wirbelquelle zu bestimmen. Dazu müssen wir bedenken, daß der Strom ein Flächenstrom ist, den man sich in einem System von Stromlinien zerlegt vorstellen kann. Die Lamelle hat zwar kein homogenes Gefüge, doch können wir die Stromlinien annäherungsweise zeichnen. Wenn wir das tun, bemerken wir, daß sich die Flüssigkeit der Wirbelquelle immer in der Stromlinie bewegt. Nur muß noch erforscht werden, in welcher der beiden Richtungen das geschieht.

Dabei müssen wir die Kraftlinien des äußeren Feldes betrachten. Diese Linien spannen sich nämlich zwischen der Wirbelquelle und der Sonde aus, wo sie je ein Ende haben, zwischen denen eine gewisse Potentialdifferenz besteht. Die Richtung der Flüssigkeitsbewegung hängt von dem Vorzeichen dieser Potentialdifferenz ab. Die Flüssigkeit bewegt sich in der Richtung des positiven Stroms, wenn das Potential an der Wirbelquelle höher ist, und in der Richtung des negativen Stroms, wenn das Potential an der Sonde höher ist.

Wir können die Stromfäden auch als Flüssigkeitsfäden uns vorstellen und dann die Erscheinung folgenderweise beschreiben: Schneiden äußere elektrostatische Kraftlinien stromtragende Flüssigkeitsfäden, so bewegt sich die Flüssigkeit von Anode zu Kathode oder umgekehrt, je nachdem die Kraftlinien von der Flüssigkeit ab oder gegen die Flüssigkeit hin gerichtet sind.

Und wenn man schließlich die Influenzwirkung des äußeren elektrostatischen Feldes in Betracht zieht, so lautet das Gesetz in anderer Fassung: Die Flüssigkeit bewegt sich immer so, wie die gebundene (ungleichnamige) Influenzelektrizität durch die elektromotorische Kraft der Lamelle bewegt wird.

Man ersieht aus der Beschreibung, daß zwischen dieser Erscheinung und der elektrischen Endosmose eine Analogie besteht. In beiden Erscheinungsarten wird Flüssigkeit in der Richtung des Stroms oder entgegengesetzt bewegt, nur daß bei unserer Erscheinung die Richtung von dem äußeren Kraftfeld, bei der Endosmose jedoch von der Flüssigkeit und deren Gefäß abhängt.

Es wäre zu früh, eine endgültige Theorie dieser Erscheinungen feststellen zu wollen, aber ich glaube doch, daß eine einfache Erklärung ebenso leicht gegeben werden kann, wie dies für die kataphoretischen und endosmotischen Erscheinungen in der Theorie von Quincke und Helmholtz geschah. In unserer Erscheinung übt das äußere elektrostatische Feld Influenzwirkung auf die Lamelle aus und die Folge ist, daß sich die elektrische Dichte an dem Orte, welchen wir Wirbelquelle nannten, ändert. Wir können voraussetzen, daß sich hier positive oder negative Elektrizitäten sammeln, welche dann durch das Feld der elektromotorischen Kraft in der Richtung des Stroms oder entgegengesetzt dazu bewegt werden.

Freilich möchten wir etwas Näheres erfahren über den Mechanismus der Influenzwirkung. Aber eben diese Erscheinung erweckt in uns die Hoffnung, daß wir vielleicht in die Lage kommen werden, dies ermitteln zu können.

(Eingegangen 16. Januar 1914.)

Über die Elektrizität der Niederschläge.

Von G. C. Simpson.

In ihrer Veröffentlichung „Zur Influenztheorie der Niederschlagselektrizität“[1]) haben die Herren Elster und Geitel betont, daß ein Ausdruck, den ich in meiner jüngst erschienenen Arbeit[2]) gebraucht habe, den Eindruck hervorgerufen habe, als hätten sie bei der Bestimmung des Vorzeichens der Elektrizität in ihrer ursprünglichen Arbeit über diesen Gegenstand einen Fehler gemacht. Ich möchte mein Bedauern darüber ausdrücken, diesen Ausdruck angewandt zu haben, zumal ich bei seiner Niederschrift keineswegs die Absicht hatte, ihm die Bedeutung beizulegen, die den

1) Diese Zeitschrift **14**, 1287, 1913.
2) Diese Zeitschrift **14**, 1057, 1913.

Worten, wie ich nunmehr sehe, innewohnt. Ich wollte nur betonen, daß das Vorzeichen der Niederschlagselektrizität nach der ursprünglichen Theorie von Elster und Geitel, wie sie Herr Schindelhauer anführt, dem Vorzeichen entgegengesetzt ist, welches die verbesserte Theorie ergibt, wie sie Herr Geitel in seinem Braunschweiger Vortrag auseinandergesetzt hat.

Die Influenztheorie der Niederschlagselektrizität beruht durchaus auf der Möglichkeit, daß kleine Wolkenteilchen mit Regentropfen oder Hagelkörnern zu elektrischem Kontakt gelangen, ohne absorbiert zu werden. Daß kleine Wassertropfen voneinander und von der Oberfläche größerer Tropfen abprallen können, ist eine erwiesene und jedem vertraute Tatsache. Ebenso ist die physikalische Erklärung für diese Tatsache die, daß stets zwischen den beiden Oberflächen eine Luftschicht vorhanden ist, und daß die Oberflächen selbst niemals zusammentreffen. Wenn diese Erklärung richtig ist, wie kann dann elektrischer Kontakt vorliegen? In dieser Hinsicht würde nicht der geringste Zweifel bestehen, wenn nicht der Versuch vorläge, den die Herren Elster und Geitel im Jahre 1885 angestellt haben, und auf dem ihre Theorie beruht. Dieser Versuch ist von grundlegender Bedeutung und ist seinerzeit mit folgenden Worten beschrieben worden[1]):

„Daß sehr feine Wassertröpfchen mit einer größeren Wasserfläche in der Tat in leitende Berührung kommen können, ohne mit derselben zusammenzufließen, wurde in folgender Weise experimentell bestätigt: Die metallene Mündung eines Zerstäubers wurde schräg auf eine isolierte Wasserfläche gerichtet, die mit einem Thomsonschen Quadrantenelektrometer leitend verbunden war. Ein zylindrisches Metallrohr von 1½ cm Weite und 2 cm Länge wurde so über die Mündung des Zerstäubers geschoben, daß sich dieselbe in der Mitte des Röhrchens befand. Letzteres war, wie auch der Zerstäuber selbst, zur Erde abgeleitet und verhinderte so, daß irgendwelche störende elektrische Einflüsse erheblich influenzierend auf die die Ausflußöffnung verlassenden Tröpfchen einwirkten. Bei dieser Anordnung wird ein großer Teil des in schräger Richtung auf die Wasserfläche auftreffenden Wasserstaubes von derselben reflektiert. Oberhalb der sich bildenden Dunstwolke wurde eine isolierte Metallkugel von 2 cm Durchmesser aufgestellt, welche je nach Bedürfnis mit dem positiven oder negativen Pole einer Zambonischen Säule von 2000 Plattenpaaren leitend verbunden werden konnte. Es zeigte sich nun, daß, wenn der Zerstäuber in Tätigkeit war, das isolierte Gefäß, in welchem sich die reflektierende Wasserfläche befand, stets eine der Ladung der Metallkugel gleichnamige, mit Skala und Fernrohr nicht mehr zu messende Ladung annahm, während der reflektierte Wasserstaub entgegengesetzt elektrisch wurde. Hieraus folgt, daß nicht etwa ein direkter Übergang der Elektrizität durch die Dunstwolke zur Flüssigkeit stattgefunden hat. Es verhielten sich mithin die von der Wasserfläche abprallenden Wasserkügelchen genau so wie die Tropfen des Thomsonschen Tropfensammlers, und das Gefäß wie der Tropfensammler selbst. Dies ist aber nur möglich, wenn die abfliegenden Tröpfchen bei ihrem Aufprallen mit der Wasserfläche in leitende Berührung kommen."

Dieser Versuch, der im Jahre 1885 überzeugend erschien, ist dies heutzutage keineswegs. Im Jahre 1885 wußte man nichts von der Möglichkeit, Luft durch Zerstäuben von Flüssigkeiten zu ionisieren. Die Erklärung, die man heute geben würde, ist folgende:

Wenn man Wasser in der Weise zerstäubt, wie es Elster und Geitel beschrieben haben, so wird, wie Eve[1]) dargetan hat, die Luft im Gebläse stark ionisiert. Mithin wurden bei dem Versuch die feinen Wasserteilchen in einem Strome ionisierter Luft mitgeführt. Als dieser Strom mit der Wasseroberfläche in dem durch die geladene Kugel über dieser Fläche erzeugten starken elektrischen Felde in Berührung kam, erhielt die Wasserfläche ihre Ladung von den Ionen und nicht von den abprallenden Wassertropfen. Nimmt man an, daß die Kugel positiv geladen war, so würde die Wasserfläche positiv geladen werden, und die Wolke der Wasserteilchen würde nach dem Entweichen aus dem Felde einen kleinen negativen Ladungsrückstand haben. Diese Deutung erklärt die Tatsachen ohne das Abprallen der Wassertropfen; das Ergebnis würde in der Tat dasselbe gewesen sein, wenn die Tropfen alle entfernt worden wären, ehe der Luftstrom mit der Wasserfläche in Berührung gelangte.

Angesichts der theoretischen Schwierigkeiten, zu erklären, wieso ein Tropfen mit einer Wasser- oder Eisfläche in leitender Berührung sein kann, ohne daß eine mechanische Berührung stattfindet, ist es höchst erwünscht, daß

1) Elster u. Geitel, Wied. Ann. **25**, 129, 1885.

1) Phil. Mag. (6) **14**, 382, 1907.

weitere Laboratoriumsversuche angestellt werden.

Einstweilen kann die neue Theorie, so anziehend sie ist, nicht als endgültig angesehen werden.

Simla, Indien, 17. Dezember 1913.

(Eingegangen 5. Januar 1914.)

Bemerkung zu einer Mitteilung des Herrn A. Lo Surdo.

Von J. Stark.

In meiner ersten Mitteilung über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien ist folgende Stelle enthalten: „Nachdem einmal ein Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien für eine große Stärke desselben festgestellt ist, wird es wohl bei Anwendung ausreichender Dispersion gelingen, ihn auch für das schwächere Feld in der ersten Kathodenschicht und in der positiven Säule des Glimmstroms oder Lichtbogens nachzuweisen. Es wird sich zeigen lassen, daß bei beträchtlicher Erhöhung der elektrischen Feldstärke in diesen Stromgebieten gewisse, für den neuen Effekt besonders empfindliche Spektrallinien in Komponenten zerlegt werden."

Herr Lo Surdo hat nun in einer kürzlich erschienenen Notiz[1]) mitgeteilt, daß er an der ersten Kathodenschicht des Glimmstroms in Wasserstoff den neuen Effekt an den für ihn besonders empfindlichen Wasserstofflinien beobachtet hat. Er zitiert wohl meine Abhandlung[2]), weist aber nicht darauf hin, daß das Prinzip der von ihm benutzten Methode bereits von mir angegeben ist.

Es ist vielleicht dem Fernerstehenden gegenüber nicht überflüssig, auf die Nachteile dieser Methode hinzuweisen. Dies um so mehr, als die Mitteilungen der Herren Lo Surdo und Garbasso die Methode nicht allein als eine originelle Leistung des Herrn Lo Surdo hinstellen, sondern sogar die Einfachheit derselben hervorheben.

Die elektrische Feldstärke nimmt von der Kathode weg rasch ab; man erhält darum nur bei stigmatischer Abbildung der ersten Kathodenschicht quer zu ihrer Achse durch den Spektrographen scharfe elektrische Komponenten der von ihr emittierten Serienlinien. Und selbst in diesem Falle verlaufen die Komponenten nicht parallel, wie bei der von mir ausgearbeiteten Methode, sondern sie sind um so mehr gegen die unzerlegte Linie geneigt, je rascher die Feldstärke von der Kathode weg abnimmt. Zudem läßt sich schwer oder gar nicht zu einem im Spektrogramm gemessenen Komponentenabstand die zugehörige Feldstärke ermitteln. Aus diesem Grunde ist die Methode der ersten Kathodenschicht für quantitative Messungen unbrauchbar.

Von mir und Herrn Wendt ist der Längseffekt des elektrischen Feldes bereits Anfang Dezember 1913 beobachtet worden. Die Abhandlung darüber hat Herr Voigt am 20. Dezember 1913 der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen vorgelegt. Nun schreibt Herr Lo Surdo: „Es gestattet aber meine Methode, den longitudinalen Effekt ohne jede Schwierigkeit zu untersuchen". Unter „meiner Methode" versteht er dabei die oben gekennzeichnete Methode der ersten Kathodenschicht. Er macht indes keine näheren Angaben über die Anwendung dieser Methode auf den Längseffekt. Daß keine Schwierigkeit vorhanden sein soll, erscheint fraglich. Jedenfalls vermisse ich eine Angabe darüber, wie er die Störung durch die Inhomogenität des elektrischen Feldes und durch den Dopplereffekt hierbei in Wirklichkeit vermieden hat. Bei der Beobachtung der Lichtemission der ersten Kathodenschicht in deren Achse lassen sich nämlich die aus verschieden starken Feldern kommenden, überdies mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegten Lichtanteile nicht mehr durch stigmatische Abbildung reinlich trennen; die Komponenten einer Linie müssen darum unscharf erscheinen, und die Angabe einer bestimmten Feldstärke ist in diesem Falle erst recht nicht mehr möglich.

Nach diesen Darlegungen wird wohl auch der Fernerstehende zugeben, daß die Mitteilung des Herrn Lo Surdo keinen Fortschritt in prinzipieller oder quantitativer Hinsicht gegenüber meinen Resultaten und Hinweisen bringt; er wird ferner erkennen, daß die Methode der ersten Kathodenschicht für die Beobachtung des Quer- und noch mehr des Längseffektes zu quantitativen Messungen unbrauchbar ist. Unter diesen Umständen ist es aus sachlichen Gründen nicht zu verstehen, daß Herr Garbasso die von mir aufgefundene neue Erscheinung den Stark-Lo Surdo-Effekt nennt, um so weniger, als Herr Lo Surdo selbst zugibt, daß er erst durch das Lesen meiner ersten Mitteilung über meine Beobachtungen veranlaßt wurde, eine frühere ungeklärte Beobachtung von ihm im Sinne des von mir entdeckten Effektes zu deuten. Und ich darf unter diesen Umständen wohl erwarten, daß kein loyal denkender Fachgenosse dem Beispiele des Herrn Garbasso folgen wird.

Aachen, Physikal. Institut der Technischen Hochschule, 4. Februar 1914.

(Eingegangen 5. Februar 1914.)

1) A. Lo Surdo, diese Zeitschr. 15, 122, 1914.
2) Der Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. vorgelegt am 20. November 1913.

BESPRECHUNGEN.

Technik des Kriegswesens. (Die Kultur der Gegenwart. Ihre Entwicklung und ihre Ziele. Herausgegeben von P. Hinneberg. Teil IV, Band 12.) gr. 8. XI u. 886 S. mit 91 Abbildungen im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1913. M. 24.—

Das großangelegte Werk enthält dem Hauptteile nach Abschnitte, welche allgemeineres Interesse haben, einige sind auch für den Physiker von besonderem Werte. Als erster wäre hier zu nennen der Abschnitt III: Die Waffentechnik in ihren Beziehungen zur Metallurgie und zur Konstruktionstechnik von W. Schwinning. In sehr klarer Weise werden die für die verschiedenen Waffen nötigen physikalischen Eigenschaften erörtert, sowie die Auswahl und Behandlung der Metalle besprochen, welche diesen Anforderungen Genüge tun. Auch in die Mechanik des Aufbaus der Waffen gibt dieser Abschnitt wertvolle Einblicke.

Es schließt sich an: Die Waffentechnik in ihrer Beziehung zur Optik, von v. Eberhard, in welchem kurz die optischen Instrumente beschrieben werden, die in militärischem Gebrauch sind, wie Visiervorrichtungen, Entfernungsmesser usf. Erschöpfend ist der Abschnitt: Die photographische Kamera, welche z. B. bei Luftschifferkundungen eine große Rolle spielt, nicht behandelt.

Der weitere Abschnitt: Die Waffentechnik in ihrer Beziehung zur Physik und Mathematik, von K. Becker, beschränkt sich gleichfalls, und zwar auf die Ballistik. Es werden die im Gebrauche befindlichen, zur Ermittlung des Gasdruckes, der Temperatur der Pulvergase, Verbrennungsdauer, Bewegung der Waffen während des Schusses dienenden Methoden angegeben, sodann in der äußeren Ballistik die Grundlagen sowohl der rechnerischen wie der experimentellen Methoden zur Ermittlung der Geschoßbahn und Geschwindigkeit. Der Abschnitt gibt einen guten Überblick.

Von wesentlich chemischem Interesse ist der zweite: Die Waffentechnik in ihrer Beziehung zur Chemie, von O. Poppenberg, in welchem sich zunächst ein klarer Überblick über Treibmittel und Explosivstoffe, die Verschiedenheit der Anforderungen, welche die Industrie und der Militärtechniker an diese Stoffe stellen, findet, weiter wird besprochen, inwieweit die letztere durch die vorhandenen Pulver und Sprengstoffe befriedigt werden.

Von den übrigen Abschnitten: Kriegsvorbereitung, Kriegsführung, Technik des Befestigungswesens, Materielle Vorbereitung für den Seekrieg, Flottenpersonal und Seekriegsführung, Einfluß des Kriegswesens auf die Gesamtkultur tritt besonders der letzte von A. Kersting geschriebene nach Inhalt und Sprache hervor.

Neesen.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Freiburg i. Br. Dr. E. A. Ansel für Astronomie und angewandte Mathematik, an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Kurd Endell für Mineralchemie, an der Universität Krakau Dr. A. Galecki für physikalische Chemie, an der Technischen Hochschule Wien Dr. techn. Anton Lackner für darstellende und projektive Geometrie, an der Technischen Hochschule Berlin Professor Dr. Georg Berndt für Physik, an der Technischen Hochschule Berlin der Direktor der chemischen Fabrik Schering und frühere ord. Professor an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Hans Bucherer für Praxis der Färberei und des Zeugdruckes, an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Alfred Reis für Physikalische Chemie und Elektrochemie, an der Universität Freiburg i. B. Dr. Walter Madelung für Chemie.

Ernannt: Der Chemiker Dr. D. Wolk de Prémus zum Professor der Chemie industrielle am (neubegründeten) Institut Léonard de Vinci in Paris, R. Stevenson zum Assistant-Professor der Chemie an dem College of the City of New York, der Privatdozent an der Universität München Professor Dr. Heinrich Wieland zum etatsmäßigen a. o. Professor für organische Chemie an derselben Hochschule, der Oberingenieur der Siemens-Schuckert Werke in Berlin Dr.-Ing. Karl Czeija zum ord. Professor des Elektromaschinenbaues an der Technischen Hochschule Braunschweig.

Verliehen: Dem ständigen Mitarbeiter an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Reichardt der Titel Technischer Rat, dem Privatdozenten für Physik an der Universität Berlin Dr. Franz Kiebitz der Titel Professor.

Akademiewahlen: Das ord. Mitglied der Kais. Russ. Akademie in St. Petersburg Fürst Boris Galitzin, der ord. Professor der anorganischen Chemie an der Universität Leiden Dr. Fr. A. H. Schreinemakers, der Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Riga Dr. Paul Walden wurden zu korrespondierenden Mitgliedern der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen gewählt.

In den Ruhestand: Der a. o. Professor der Mathematik an der Universität Heidelberg Dr. Karl Köhler (unter gleichzeitiger Ernennung zum ord. Honorarprofessor), der ord. Professor für organische Chemie an der Technischen Hochschule Berlin Geh. Reg.-Rat Dr. Karl Liebermann.

Gestorben: Der ord. Professor der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Wien Dr. Karl Pichelmayer, der Astronom Sir David Gill in London (früher Direktor des Royal Observatory des Cape of Good Hope), der a. o. Professor der physikalischen Chemie an der Universität Krakau Dr. Ludwik Bruner (am 5. Dez. 1913).

Angebote.

Zum möglichst sofortigen Eintritt **suchen** wir einen

Spezial-Ingenieur oder Physiker für Hochfrequenztechnik.

Herren mit mehrjähriger Praxis auf dem Gebiet der Wellentelegraphie werden bevorzugt.

Bewerbungen mit Lebenslauf, Zeugnisabschriften, sowie Angabe über Gehaltsansprüche und frühesten Eintrittstermin sind zu richten an

Signal-Ges. m. b. H.
Kiel, Werk Ravensberg am Habsburgerring.

Gesuche.

Physiker, Dr. phil.,

Universitätsassistent, mit besten Zeugnissen, Staatsexamen, sucht **Stellung an physikalischem Institut.** Anfragen erbeten unter **S. H. 410** an die Expedition dieser Zeitschrift.

Für die Redaktion verantwortlich Dr. Hans Busch in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.